1 Введение в высшую теорию категорий. II (6 июня)

1.1 Бикатегории

Один из вариантов ослабления понятия сильной n-категории легко предъявить явно в случае $n = 2$. Будем называть **бикатегорией** $\mathcal{B}$ следующий набор данных:

- класс $\mathcal{B}_0$ (объекты);
- для каждой пары объектов $A, B \in \mathcal{B}_0$ — категория $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(A, B)$ (ее объекты — 1-морфизмы категории $\mathcal{B}$, ее морфизмы — 2-морфизмы категории $\mathcal{B}$);
- для каждой тройки объектов $A, B, C \in \mathcal{B}_0$ — функтор $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(B, C) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(A, C)$ (композиция), записываемый на объектах (то есть, на 1-морфизмах $\mathcal{B}$) как $(g, f) \mapsto g \circ f$, а на морфизмах (то есть, на 2-морфизмах $\mathcal{B}$) как $(\delta, \gamma) \mapsto \delta * \gamma$;
- для каждого объекта $A \in \mathcal{B}_0$ — 1-морфизм $1_A \in \mathrm{Hom}(A, A)$ (единичный морфизм);
- для каждой тройки 1-морфизмов $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$, $h\colon C \to D$ — изоморфизм когерентности $\alpha_{h,g,f}\colon (h \circ g) \circ f \to h \circ (g \circ f)$ в категории $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(A, D)$;
- для каждого 1-морфизма $f\colon A \to B$ — изоморфизмы $\lambda_f\colon 1_B \circ f \to f$ и $\rho_f\colon f \circ 1_A \to f$ в категории $\mathrm{Hom}(A, B)$;

такие, что изоморфизмы когерентности $\alpha_{f,g,h}$, λ_f, ρ_f естественны по f, g, h и удовлетворяют аксиомам пятиугольника и треугольника аналогичным тем, которые мы встречали в определении моноидальной категории.

Примеры 1.

1. Нетрудно видеть, что бикатегория с одним объектом — это в точности моноидальная категория.
2. Любую строгую 2-категорию можно рассматривать как бикатегорию, в которой все изоморфизмы когерентности тождественны.
3. Построим **фундаментальный 2-группоид** $\Pi_2 S$ топологического пространства S. Объекты $\Pi_2 S$ — точки S; 1-морфизмы — пути между точками; 2-морфизмы между путями — гомотопические классы гомотопий путей (сохраняющих начало и конец).

Пусть $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ — бикатегории. **Вялый функтор** $F = (F, \phi)\colon \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ — это отображение множеств $F_0\colon \mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}'_0$ вместе с функторами $F_{A,B}\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}'}(F_0 A, F_0 B)$ для каждой пары объектов $A, B \in \mathcal{B}_0$, 2-морфизмами $\phi_{g,f}\colon F_{B,C} g \circ F_{A,B} f \to F_{A,C}(g \circ f)$ для каждой пары 1-морфизмов $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$, и 2-морфизмами $\phi_A\colon 1_{F_0 A} \to F_{A,A} 1_A$ для каждого объекта $A \in \mathcal{B}_0$, удовлетворяющими аксиомам, аналогичным аксиомам для вялого функтора между моноидальными категориями. Совершенно аналогично определяются **ковялые**, **слабые** и **строгие** функторы: например, все компоненты ϕ_* у слабого функтора должны быть изоморфизмами, а у строгого функтора — тождественными морфизмами. Компоненты F_* функтора F мы будем обозначать через F.

Пусть теперь $(F, \phi), (G, \psi)\colon \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ — вялые функторы между бикатегориями. Определим **вялое преобразование** $\tau\colon F \to G$ как набор 1-морфизмов $\tau_A\colon FA \to GA$ для каждого $A \in \mathcal{B}_0$ и 2-морфизмов $Gf \circ \tau_A \to \tau_B \circ Ff$ для каждого 1-морфизма $f\colon A \to B$ в $\mathcal{B}$ таких, что τ_f естественно по f, и выполняются (несложные) аксиомы когерентности.

Будем называть слабый функтор $(F, \phi)\colon \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ между бикатегориями **локальной эквивалентностью**, если для каждой пары $A, B \in \mathcal{B}_0$ функтор $F_{A,B}\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}'}(FA, FB)$

является эквивалентность категорий. Слабый функтор F называется **биэквивалентностью**, если он является локальной эквивалентностью и, кроме того, для каждого объекта $A' \in \mathcal{B}'_0$ существует объект $A \in \mathcal{B}_0$ такой, что $FA \cong A'$.

Теорема 1 (Когерентность для бикатегорий)**.** *Всякая бикатегория биэквивалентна некоторой строгой 2-категории.*

1.2 Мультикатегории

Упомянем еще одно обобщение понятия категории: мультикатегории. Единственное отличие состоит в том, что морфизм в мультикатегории — это не стрелка из объекта a в объект b, а «мультистрелка» из объектов $a_1, \dots, a_n$ в a. Мы рассматриваем несимметричные мультикатегории, то есть, порядок объектов $a_1, \dots, a_n$ имеет значение. Иными словами, мы рассматриваем «гэджеты» с несколькими входами и одним выходом. Комбинируя эти гэджеты, мы можем получать схемы с несколькими входами и одним выходом; композиция в мультикатегории должна сопоставлять каждой такой схеме эквивалентный гэджет с таким же количеством входов. Более формально, **мультикатегория** C — это

- множество C_0 объектов мультикатегории C;
- для каждого n и для каждых $a_1, \dots, a_n, a \in C_0$ — множество $\mathrm{Hom}_C(a_1, \dots, a_n; a)$, элементы θ которого называются **морфизмами** или **стрелками** в C и обозначаются $a_1, \dots, a_n \xrightarrow{\theta} a$;
- для каждых $n, k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$ и $a, a_i, a_i^j \in C_0$ — отображение $\mathrm{Hom}_c(a_1, \dots, a_n; a) \times \mathrm{Hom}_C(a_1^1, \dots, a_1^{k_1}; a_1) \times \dots \times \mathrm{Hom}_C(a_n^1, \dots, a_n^{k_n}; a_n) \to \mathrm{Hom}_C(a_1^1, \dots, a_1^{k_1}, \dots, a_n^1, \dots, a_n^{k_n}; a)$ (**композиция**), записываемое как $(\theta, \theta_1, \dots, \theta_n) \mapsto \theta \circ (\theta_1, \dots, \theta_n)$;
- для каждого $a \in C_0$ — элемент $1_a \in \mathrm{Hom}_C(a; a)$;

удовлетворяющие соотношениям ассоциативности $\theta \circ (\theta_1 \circ (\theta_1^1, \dots, \theta_1^{k_1}), \dots, \theta_n \circ (\theta_n^1, \dots, \theta_n^{k_n})) = (\theta \circ (\theta_1, \dots, \theta_n)) \circ (\theta_1^1, \dots, \theta_1^{k_1}, \dots, \theta_n^1, \dots, \theta_n^{k_n})$ (для всех наборов, для которых эти композиции определены) и соотношениям на тождественные морфизмы $\theta \circ (1_{a_1}, \dots, 1_{a_n}) = \theta = 1_a \circ (\theta)$ для всех стрелок $\theta \colon a_1, \dots, a_n \to a$.

Примеры 2.

1. Мультикатегория, в которой каждая стрелка является унарной (то есть, $\mathrm{Hom}_C(a_1, \dots, a_n; a)$ пусто для всех $n \neq 1$) — это то же самое, что обычная категория.
2. Из любой моноидальной категории A можно получить мультикатегорию, морфизмы $a_1, \dots, a_n \to a$ которой — это морфизмы $a_1 \otimes \dots \otimes a_n \to a$ в категории A. Композиция получается очевидным образом из структуры моноидальной категории в A.
3. Аналогично, из категории A с конечными произведениями можно получить мультикатегорию C так: $\mathrm{Hom}_C(a_1, \dots, a_n; a) = \mathrm{Hom}_A(a_1 \times \dots \times a_n, a)$.
4. Более общо, если A — моноидальная категория и C_0 — некоторый набор объектов A (не обязательно замкнутый относительно тензорного произведения), то можно рассмотреть мультикатегорию C с объектами C_0 и морфизмами, описанными в примере 2. Это показывает, в частности, что не всякая мультикатегория получается из моноидальной категории конструкцией из примера 2.

5. Если A — категория с конечными копроизведениями, пример 2 показывает, что можно построить мультикатегорию C с теми же объектами, что и в A, и $\mathrm{Hom}_C(a_1, \ldots, a_n; a) = \mathrm{Hom}_A(a_1, a) \times \cdots \times \mathrm{Hom}_A(a_n, a)$ с очевидной композицией. Эти формулы позволяют определить мультикатегорию C и для произвольной категории A.

1.3 Квазикатегории

Неформально, (∞, n)-категории — это ∞-категории, в которых все k-морфизмы обратимы при $k > n$. Нетрудно видеть, что по топологическому пространству можно построить $(\infty, 0)$-категорию $\pi_\infty X$: ее объекты — точки пространства X, 1-морфизмы — пути между точками, 2-морфизмы — гомотопии между путями, 3-морфизмы — гомотопии между этими гомотопиями, и так далее. Хотелось бы, чтобы каждая $(\infty, 0)$-категория имела вид $\pi_\infty X$ для некоторого пространства X. Мы будем также называть $(\infty, 0)$-категории ∞-группоидами, а $(\infty, 1)$-категории — просто ∞-категориями. Дело в том, что (∞, n)-категории при $n \geq 2$ нам не очень интересны. Видимо, самый естественный способ смотреть на (∞, n)-категории состоит в том, что (∞, n)-категория является категорией, оснащенной над $(\infty, n-1)$-категориями.

Заметим, что при этом ∞-категория должна быть категорией, оснащенной над ∞-группоидами. То есть, ∞-категория должна состоять из объектов и ∞-группоидов $\mathrm{Hom}(X, Y)$ для каждой пары объектов X, Y, с определенными операциями композиции и тождественными морфизмами. Поэтому имеет смысл следующее определение: **топологической категорией** называется категория, оснащенная над категорией компактно порожденных топологических пространств (условие компактной порожденности здесь носит достаточно технический характер). То есть, топологическая категория $\mathcal{C}$ — это набор объектов вместе с пространствами $\mathrm{Hom}_\mathcal{C}(X, Y)$ для каждой пары объектов и непрерывными отображениями композициями $\mathrm{Hom}_\mathcal{C}(X_0, X_1) \times \mathrm{Hom}_\mathcal{C}(X_1, X_2) \times \cdots \times \mathrm{Hom}_\mathcal{C}(X_{n-1}, X_n) \to \mathrm{Hom}_\mathcal{C}(X_0, X_n)$ (для всех $n \geq 0$), ассоциативными в очевидном смысле.

При желании мы могли бы взять это определение за основу и сказать, что ∞-категория — это в точности топологическая категория. Однако, более удобно работать с другим (эквивалентным) определением. Для того, чтобы объединить (гомотопическую) теорию топологических пространств с (классической) теорией категорий, предлагается рассмотреть промежуточный объект — симплициальные множества. Для натурального $n \geq 0$ пусть $[n]$ — линейно упорядоченное множество $\{0, \ldots, n\}$. Обозначим через $\boldsymbol{\Delta}$ категорию комбинаторных симплексов: ее объекты — линейно упорядоченные множества $[n]$, а морфизмы — неубывающие отображения. **Симплициальным множеством** называется предпучок множеств на категории $\boldsymbol{\Delta}$, то есть, функтор $\boldsymbol{\Delta}^{op} \to \mathcal{S}et$. Иными словами, симплициальное множество S состоит из множеств S_n для всех $n \geq 0$ и отображений $p^*\colon S_n \to S_m$ для каждого неубывающего отображения $[m] \to [n]$, которые согласованы с композицией. Для $0 \leq j \leq n$ определим **отображение грани** $d_j\colon S_n \to S_{n-1}$ как отображение p^*, где $p\colon [n-1] \to [n]$ задается формулой

$$p(i) = \begin{cases} i & \text{если } i < j, \\ i+1 & \text{если } i \geq j. \end{cases}$$

Аналогично, **отображение вырождения** $s_j\colon S_n \to S_{n+1}$ определяется как q^*, где $q\colon [n+1] \to [n]$ задается формулой

$$q(i) = \begin{cases} i & \text{если } i \leq j, \\ i-1 & \text{если } i > j. \end{cases}$$

Любое неубывающее отображение можно разложить в композицию граней и вырождений, поэтому структура симплициального множества полностью задается набором множеств S_n,

$n \geq 0$ вместе с отображениями граней и вырождений.

Мы будем обозначать категорию симплициальных множеств через $\mathcal{S}et_\Delta$. Для линейно упорядоченного множества J обозначим через $\Delta^J \in \mathcal{S}et_\Delta$ представимый предпучок $[n] \mapsto \mathrm{Hom}([n], J)$ (морфизмы в категории линейно упорядоченных множеств), и для натурального $n \geq 0$ будем писать Δ^n вместо $\Delta^{[n]}$. Пусть $0 \leq j \leq n$. Определим **j-й рог** $\Lambda^n_j \subset \Delta^n$ как n-симплекс Δ^n с удаленной внутренностью и j-ой гранью.

Обсудим связь теории симплициальных множеств с теорией топологических пространств и с теорией категорий. По топологическому пространству X можно построить симплициальное множество $\mathrm{Sing}\, X$, называемое **сингулярным комплексом**: его n-симплексы — непрерывные отображения $|\Delta^n| \to X$, где $|\Delta^n| = \{(x_0, \ldots, x_n) \in [0,1]^{n+1} \mid x_0 + \cdots + x_n = 1\}$ — стандартный n-симплекс. У этого функтора есть левый сопряженный $|\cdot|$ — геометрическая реализация симплициального множества. При этом топологическое пространство X определяется симплициальным множеством $\mathrm{Sing}\, X$: коединица сопряжения $|\mathrm{Sing}\, X| \to X$ является слабой гомотопической эквивалентностью.

Пусть K — симплициальное множество. K называется **комплексом Кана**, если для любого $0 \leq i \leq n$ любой морфизм $\Lambda^n_i \to K$ пропускается через вложение $\Lambda^n_i \to \Delta^n$:

$$\begin{tikzcd} \Lambda^n_i \arrow[r] \arrow[d, hook] & K \\ \Delta^n \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

Сингулярный комплекс любого топологического пространства является комплексом Кана, поскольку рог $|\Lambda^n_i|$ является ретрактом симплекса $|\Delta^n|$.

С другой стороны, по каждой категории $\mathcal{C}$ мы можем построить симплициальное множество $N(\mathcal{C})$ — **нерв** категории $\mathcal{C}$: возьмем в качестве $N(\mathcal{C})_n$ множество функторов $[n] \to \mathcal{C}$, то есть, множество последовательностей морфизмов $C_0 \xrightarrow{f_1} C_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_n} C_n$ длины n. Отображение грани d_i переводит эту последовательность в последовательность $C_0 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_{i-1}} C_{i-1} \xrightarrow{f_{i+1} \circ f_i} C_{i+1} \xrightarrow{f_{i+2}} \cdots \xrightarrow{f_n} C_n$, а отображение вырождения s_i — в последовательность $C_0 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_i} C_i \xrightarrow{\mathrm{id}_{C_i}} C_i \xrightarrow{f_{i+1}} C_{i+1} \xrightarrow{f_{i+2}} \cdots \xrightarrow{f_n} C_n$. Очевидно, что категорию $\mathcal{C}$ можно восстановить (с точностью до изоморфизма) из ее нерва. Опишем симплициальные множества, которые получаются таким образом:

Утверждение 1. *Пусть K — симплициальное множество. Следующие условия равносильны:*

1. *Существует малая категория $\mathcal{C}$ и изоморфизм $K \cong N(\mathcal{C})$.*

2. *Для каждого $0 < i < n$ каждый морфизм $\Lambda^n_i \to K$ единственным образом пропускается через вложение $\Lambda^n_i \to \Delta^n$:*

$$\begin{tikzcd} \Lambda^n_i \arrow[r] \arrow[d, hook] & K \\ \Delta^n \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

Действительно, второе условие для $n = 2$, $i = 1$ позволяет определить композицию стрелок, после чего это же условие для $n = 3$ дает ассоциативность этой композиции, а применение его для всех n позволяет построить изоморфизм $K \cong N(\mathcal{C})$. Обратное следствие еще проще.

Заметим, что второе условие из этого предложения очень похоже на определение комплекса Кана. Отличия два: во-первых, условие формулируется только для *внутренних* рогов Λ_i^n, где $0 < i < n$. Во-вторых, требуется единственность расширения. Первое отличие легко объяснимо: условие расширения уже для $n = 2$, $i = 2$ означало бы, что для каждой пары морфизмов $C_0 \to C_1$, $C_1 \to C_2$ существует морфизм $C_0 \to C_1$, делающий диаграмму коммутативной; категория с таким свойством является группоидом. Со вторым свойством сложнее: напомним, что, скажем, композиция путей в топологическом пространстве не является канонически определенной (можно зафиксировать какой-то способ прохождения путей, но такая композиция в любом случае не будет ассоциативной). Поэтому мы откажемся от единственности расширения в определении ∞-категории. Неформально говоря, 2-симплекс $\sigma\colon \Delta^2 \to K$ можно рассматривать как выражение того факта, что композиция $d_0(\sigma) \circ d_2(\sigma)$ гомотопна $d_1(\sigma)$.

Итак, назовем **∞-категорией** симплициальное множество K со следующим свойством: для каждого i, $0 < i < n$ каждый морфизм $f_0\colon \Lambda_i^n \to K$ продолжается до морфизма $\Delta^n \to K$. В литературе такое симплициальное множество называется **слабым комплексом Кана** или **квазикатегорией**.