Топологические теории поля и гипотеза о кобордизмах

Мы хотим обсудить препринт Лури [1]. В нём рассказывается, как можно доказать «гипотезу Баеза–Долана о кобордизмах» [2], но нас будет интересовать не само доказательство (полностью не написанное), а хотя бы формулировки утверждений и n-категорные аспекты.

1 Топологические теории поля

Для $n = 1, 2, 3, \ldots$ определим **категорию** $\mathcal{Cob}(n)$ **кобордизмов** размерности n.

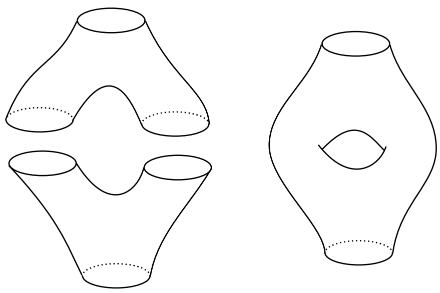
Объектами в категории $\mathcal{Cob}(n)$ являются замкнутые (компактные, без края) гладкие ориентированные многообразия размерности $n-1$.

Стрелками в категории $\mathcal{Cob}(n)$ являются **кобордизмы**. Стрелка $M \xrightarrow{B} N$ между замкнутыми гладкими многообразиями M и N — это гладкое ориентированное многообразие размерности n, снабженное диффеоморфизмом $\partial B \simeq \overline{M} \sqcup N$. Здесь и далее $\overline{M}$ обозначает многообразие M с ориентацией, замененной на противоположную, а $\sqcup$ — несвязное объединение.

* Вспомним, что ориентацию на многообразии размерности n можно понимать так: если оно ориентируемо, то $H_n(M) \simeq \mathbb{Z}$, и ориентация — это выбор образующей у $H_n(M)$.

Мы отождествляем две стрелки $M \xrightarrow{B, B'} N$, если существует диффеоморфизм $B \simeq B'$, уважающий ориентацию и согласованный на границах (продолжающий диффеоморфизмы $\partial B \simeq \overline{M} \sqcup N \simeq \partial B'$).

Композиция стрелок задается следующим образом. Если имеются два кобордизма $M \xrightarrow{B_1} M'$ и $M' \xrightarrow{B_2} M''$, то их можно склеить по M' и получить $M \xrightarrow{B_1 \circ B_2} M''$. На результате склейки возникает каноническая гладкая структура, так что операция определена корректно.



Единичной стрелкой 1_M является кобордизм $M \times [0, 1]$.

Для кобордизмов в размерности 1 и 2 можно рисовать картинки. Мы договоримся, что кобордизмы направлены сверху вниз.

$(\mathcal{Cob}(n), \sqcup, \varnothing)$ является симметрической моноидальной категорией (*всё-таки нестрогой!*). Здесь умножение $\otimes_{\mathcal{Cob}(n)} = \sqcup$ — это несвязное объединение многообразий, а единица $1_{\mathcal{Cob}(n)} = \varnothing$ — пустое $(n-1)$-многообразие.

Другая известная (нестрогая) симметрическая моноидальная категория — это категория $(\mathcal{Vect}(k), \otimes, k)$ векторных пространств над k с обычным тензорным произведением.

Определение (Atiyah, 1989, [3]). Пусть k — поле. **Топологическая теория поля** размерности n — это моноидальный функтор

$$Z \colon \mathcal{Cob}(n) \to \mathcal{Vect}(k).$$

Функториальность означает сопоставление

$$\begin{array}{rcl} \text{замкнутое } (n-1)\text{-многообразие } M & \rightsquigarrow & k\text{-векторное пространство } Z(M), \\ \text{кобордизм } M \xrightarrow{B} N & \rightsquigarrow & k\text{-линейное отображение } Z(M) \xrightarrow{Z(B)} Z(N), \end{array}$$

и функтор моноидальный, то есть он уважает (слабые) моноидальные структуры на $\mathcal{Cob}(n)$ и $\mathcal{Vect}(k)$:

$$\begin{array}{rcl} Z(M \sqcup N) & \simeq & Z(M) \otimes Z(N), \\ Z(\varnothing) & \simeq & k. \end{array}$$

Кроме того, функтор должен уважать морфизмы когерентности.

Замечания:

- На самом деле, тут можно ограничиться конечномерными векторными пространствами (в дальнейшем это обстоятельство будет важным).
- Это же называется «топологической квантовой теорией поля» или TQFT.
- Z — это первая буква слова *Zustandsumme* (*статсумма*, *partition function*), это берет начало из физики.
- Можно считать, что это «игрушечная» физическая модель, описывающая мир, который локально выглядит одинаково во всех состояниях, и разницу можно уловить лишь глобально (например, протащив частицу вдоль петли и посмотрев, стягиваема ли она). Объекты в категории $\mathcal{Cob}(n)$ — это как бы пространство, а стрелки — пространство-время. Функтор Z — это некоторое «представление».
- В реальной физике используются более хитрые модели, где должна быть какая-то геометрическая структура. Про это существуют записи лекций П.Н. Мнёва [4].
- Особенно рекомендуется обзор «A Prehistory of n-Categorical Physics» [5].

Если M — замкнутое n-многообразие, то его можно рассматривать как кобордизм $\varnothing \xrightarrow{M} \varnothing$ между пустыми $(n-1)$-многообразиями. Получается

$$k \simeq Z(\varnothing) \xrightarrow{Z(M)} Z(\varnothing) \simeq k.$$

Таким образом, для замкнутого многообразия $Z(M) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{Vect}(k)}(k,k)$, и в этом смысле это какое-то число $Z(M) \in k$.

Пусть теперь M — замкнутое $(n-1)$-многообразие. n-многообразие $M \times [0,1]$ имеет край $\overline{M} \sqcup M$. На это можно смотреть по-разному как на кобордизм:

- Это тождественная стрелка $M \xrightarrow{1_M} M$ или $\overline{M} \xrightarrow{1_{\overline{M}}} \overline{M}$.
- Это кобордизм $\overline{M} \sqcup M \xrightarrow{ev_M} \varnothing$ (*evaluation*), дающий отображение $Z(\overline{M}) \otimes Z(M) \xrightarrow{Z(ev_M)} k$.
- Это кобордизм $\varnothing \xrightarrow{coev_M} M \sqcup \overline{M}$ (*coevaluation*), дающий отображение $k \xrightarrow{Z(ev_M)} Z(M) \otimes Z(\overline{M})$.

Несложно вывести, что

1. $Z(\overline{M}) \otimes Z(M) \to k$ — это совершенное спаривание, то есть оно индуцирует изоморфизм $Z(\overline{M}) \simeq Z(M)^\vee$, где $Z(M)^\vee$ — векторное пространство, двойственное к $Z(M)$.

2. $Z(M)$ имеет конечную размерность.

Таким образом, на самом деле функтор Z принимает значения только в подкатегории *конечномерных* векторных пространств.

2 Одномерные топологические теории поля

Всякое 0-мерное многообразие — это просто набор точек. Ориентация означает расстановку знаков «+» и «−» у каждой точки. Так как Z — функтор, то достаточно задать значение $Z(\overset{+}{\bullet}) := V$. Тогда $Z(\overset{-}{\bullet}) = V^\vee$, а для произвольного 0-мерного многообразия $M = M_+ \sqcup M_-$

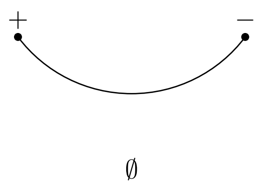
$$Z(M) \simeq (\bigotimes_{x \in M_+} V) \otimes (\bigotimes_{y \in M_-} V^\vee).$$

Теперь разберемся, какие значения Z принимает на кобордизмах. Связное 1-многообразие (с краем) — это отрезок $[0,1]$ и окружность S^1.

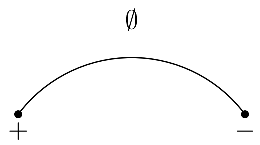
1. Если это отрезок между двумя точками $\overset{+}{\bullet}$, то $Z(\overset{+}{\bullet} \to \overset{+}{\bullet}) \simeq (V \xrightarrow{id} V)$.

2. Если это отрезок между двумя точками $\overset{-}{\bullet}$, то $Z(\overset{-}{\bullet} \to \overset{-}{\bullet}) \simeq (V^\vee \xrightarrow{id} V^\vee)$.

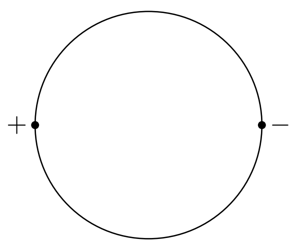
3. $Z(\overset{+}{\bullet} \sqcup \overset{-}{\bullet} \to \varnothing) \simeq (V \otimes V^\vee \xrightarrow{ev} k)$. Это морфизм $(v, \lambda) \mapsto \lambda(v)$.



4. $Z(\varnothing \to \overset{+}{\bullet} \sqcup \overset{-}{\bullet}) \simeq (k \to V \otimes V^\vee \simeq \mathrm{End}(V))$. Это морфизм $x \mapsto x \cdot id_V$.



5. Если кобордизм представляет собой окружность как стрелку $\varnothing \xrightarrow{S^1} \varnothing$, то его можно разбить на два кобордизма $\varnothing \to \overset{+}{\bullet} \sqcup \overset{-}{\bullet}$ и $\overset{+}{\bullet} \sqcup \overset{-}{\bullet} \to \varnothing$.



$$k \simeq Z(\varnothing) \to Z(\overset{+}{\bullet} \sqcup \overset{-}{\bullet}) \to Z(\varnothing) \simeq k$$

Это отображение устроено так:

$$x \mapsto x \cdot id_V \mapsto \operatorname{tr}(x \cdot id_V).$$

Таким образом, морфизм $Z(S^1)$ можно отождествить с $\dim V$.

Этот простой одномерный пример показывает, что топологическая теория поля может полностью определяться небольшим набором данных, в данном случае просто значением в одной точке. Хотелось бы, чтобы нечто подобное выполнялось для любой размерности. Буквально это далеко не так, но в каком-то высоком смысле это правда, и в этом и состоит суть гипотезы о кобордизмах.

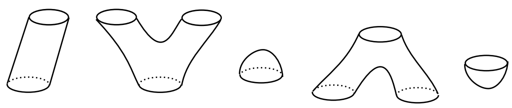
3 Двумерные топологические теории поля

Каждое замкнутое одномерное многообразие — это объединение окружностей. Если $Z(S^1) := A$, то

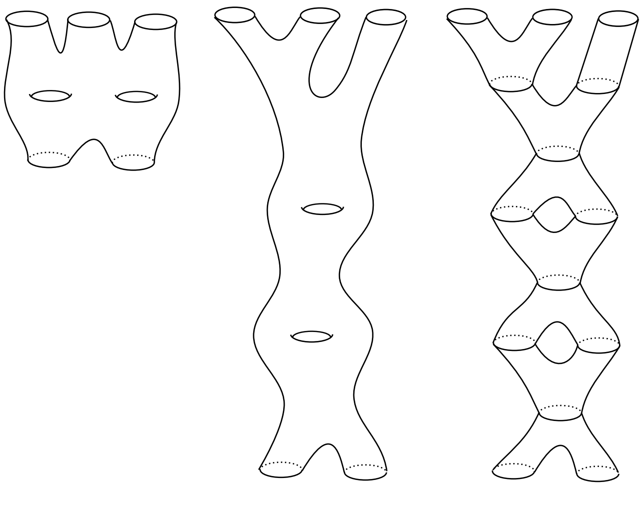
$$Z(\underbrace{S^1 \sqcup \dots \sqcup S^1}_{n}) = A^{\otimes n}.$$

В отличие от точки, у окружности ориентация не важна: существует диффеоморфизм, меняющий ее на противоположную. (У точек мы рассматривали отдельно $\overset{+}{\bullet}$ и $\overset{-}{\bullet}$.)

Каждый двумерный кобордизм можно разрезать на штаны и шапочки.



А именно, рассмотрим критические точки функции высоты $\vec{x} \mapsto x_1$. Пошевелим кобордизм так, чтобы они находились на разном уровне. Разрежем его на части между критическими точками. Получится желаемое разбиение.



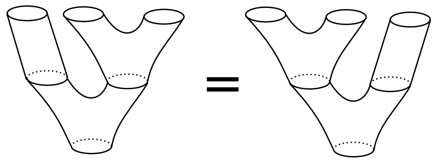
Как симметрическая моноидальная категория, $\mathcal{C}ob(2)$ порождается объектом S^1 и этими морфизмами. Это значит, что каждый объект — это тензорное произведение $(S^1)^{\otimes n}$ (для $n = 0, 1, 2, \dots$), а каждый морфизм можно разбить в композицию четырех видов морфизмов — два вида штанов, со штанинами вверх и вниз, и два вида шапочек.

Если применить к штанам и шапочкам функтор Z, то получатся следующие линейные отображения:

- **Умножение** $m\colon A \otimes A \to A$. (Это какой-то специальный морфизм, его не нужно путать с $\otimes$ из моноидальной структуры, которое тоже иногда зовется умножением.)
- **Единица** $i\colon k \to A$.
- **Коумножение** $\Delta\colon A \to A \otimes A$.
- **Коединица** $\varepsilon\colon A \to k$.

Кроме того, можно составить полный список соотношений между морфизмами. (Эти соотношения в категории $\mathcal{C}ob(2)$ очевидны из геометрических соображений.)

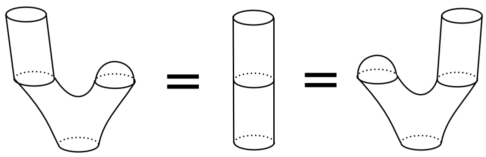
1. Ассоциативность умножения:



$$(1_A \otimes m) \circ m = (m \otimes 1_A) \circ m.$$

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes A \arrow[r, "1_A \otimes m"] \arrow[d, "m \otimes 1_A"'] & A \otimes A \arrow[d, "m"] \\
A \otimes A \arrow[r, "m"'] & A
\end{tikzcd}$$

   Единица умножения:

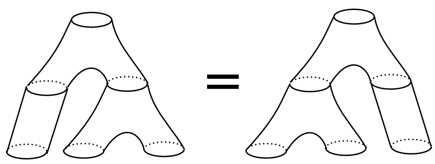


$$(1_A \otimes i) \circ m = 1_A = (i \otimes 1_A) \circ m.$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "1_A \otimes i"] \arrow[d, "i \otimes 1_A"'] \arrow[dr, "1_A"] & A \otimes A \arrow[d, "m"] \\
A \otimes A \arrow[r, "m"'] & A
\end{tikzcd}$$

2. Свойства коумножения получаются, если перевернуть вверх ногами кобордизмы (развернуть в диаграммах стрелки).

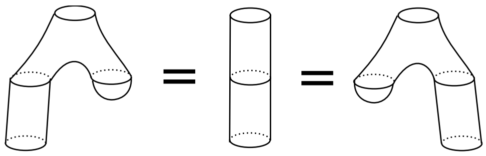
   Коассоциативность коумножения:



$$\Delta \circ (1_A \otimes \Delta) = \Delta \circ (\Delta \otimes 1_A).$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & A \otimes A \arrow[d, "1_A \otimes \Delta"] \\
A \otimes A \arrow[r, "\Delta \otimes 1_A"'] & A \otimes A \otimes A
\end{tikzcd}$$

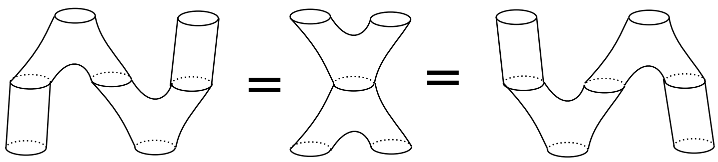
Коединица коумножения:



$$\Delta \circ (1_A \otimes \varepsilon) = 1_A = \Delta \circ (\varepsilon \otimes 1_A).$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] \arrow[dr, "1_A"] & A \otimes A \arrow[d, "1_A \otimes \varepsilon"] \\
A \otimes A \arrow[r, "\varepsilon \otimes 1_A"'] & A
\end{tikzcd}$$

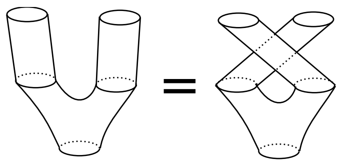
3. Соотношения Фробениуса:



$$(\Delta \otimes 1_A) \circ (1_A \otimes m) = m \circ \Delta = (1_A \otimes \Delta) \circ (m \otimes 1_A).$$

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[rr, "\Delta \otimes 1_A"] \arrow[dr, "m"] \arrow[dd, "1_A \otimes \Delta"'] & & A \otimes A \otimes A \arrow[dd, "1_A \otimes m"] \\
& A \arrow[dr, "\Delta"] & \\
A \otimes A \otimes A \arrow[rr, "m \otimes 1_A"'] & & A \otimes A
\end{tikzcd}$$

4. Коммутативность:



$$
\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[r, "1_A \otimes 1_A"] \arrow[d, "twist"'] & A \otimes A \arrow[d, "m"] \\
A \otimes A \arrow[r, "m"'] & A
\end{tikzcd}
$$

То, что удовлетворяет перечисленным соотношениям, называется **коммутативной алгеброй Фробениуса**. В более общей ситуации, **коммутативной алгеброй Фробениуса в моноидальной категории** $(\mathcal{C}, \otimes, 1_{\mathcal{C}})$ называется объект $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ вместе с морфизмами $m\colon A \otimes A \to A$, $i\colon 1_{\mathcal{C}} \to A$, $\Delta\colon A \to A \otimes A$, $\varepsilon\colon A \to 1_{\mathcal{C}}$, для которых выполнены соответствующие соотношения.

Двумерные топологические теории поля соответствуют алгебрам Фробениуса в следующем смысле.
Пусть $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ — коммутативная алгебра Фробениуса в моноидальной категории $\mathcal{C}$. Тогда существует моноидальный функтор $Z\colon \mathcal{Cob}(2) \to \mathcal{C}$, такой что $Z(S^1) = A$, и штаны и шапочки переходят в соответствующие морфизмы $m, i, \Delta, \varepsilon$.

Можно определить, что такое категория двумерных топологических теорий поля и категория коммутативных алгебр Фробениуса и доказать их эквивалентность.

Подробно этот сюжет обсуждается в книжке «Frobenius algebras and 2D topological quantum field theories» [6].

4 Расширенные топологические теории поля

Пусть Z — топологическая теория поля размерности n. Пусть M — ориентированное n-многообразие. Если рассмотреть его как кобордизм $\varnothing \xrightarrow{M} \partial M$, то получится линейное отображение

$$k \simeq Z(\varnothing) \xrightarrow{Z(M)} Z(\partial M).$$

В этом смысле $Z(M) \in Z(\partial M)$.

Пусть $N \subseteq M$ — замкнутое $(n-1)$-подмногообразие, разбивающее M на M_0 и M_1 (т.е. $M = M_0 \sqcup_N M_1$). Тогда имеем отображение

$$Z(\partial M) \otimes Z(N) \otimes Z(\overline{N}) \to Z(\partial M),$$

индуцированное совершенным спариванием $Z(N) \otimes Z(\overline{N}) \to k$. Тогда $Z(M)$ есть образ $Z(M_0) \otimes Z(M_1)$ по этому отображению.

Таким образом, чтобы вычислить $Z(M)$, полезно уметь разрезать M вдоль подмногообразий коразмерности 1.

- Как мы видели в двумерном случае, для классификации n-мерных топологических теорий поля полезно знать некоторый простой перечень n-многообразий с краем, таких что из них склеиваются все кобордизмы (там это были штаны и шапочки). Но в произвольной размерности ничего столь же простого не получится.

- Можно было бы триангулировать M в конечное число симплексов, но этот подход упирается в комбинаторные трудности.

Можно в определении топологической теории поля потребовать, чтобы она содержала информацию, относящуюся к разрезанию кобордизмов.

Пусть k — поле, а Z — n-мерная топологическая теория поля. Это определяет следующие данные:

1) Для каждого замкнутого ориентированного n-многообразия M — элемент поля $Z(M) \in k$. (Исходя из $Z(\varnothing \xrightarrow{M} \varnothing) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}ect(k)}(k, k)$.)

2) Для каждого замкнутого ориентированного $(n-1)$-многообразия M — k-векторное пространство $Z(M)$.

   Имеет место канонический изоморфизм $Z(\varnothing) \simeq k$.

3) Для каждого ориентированного n-многообразия с краем M — элемент векторного пространства $Z(M) \in Z(\partial M)$. (Исходя из $Z(\varnothing \xrightarrow{M} \partial M) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}ect(k)}(k, Z(\partial M))$.)

   Если $\partial M = \varnothing$, то это должно совпадать с тем, что дают 1) и 2).

2-расширенной топологической теорией поля называется топологическая теория поля с дополнительными данными:

4) Для каждого замкнутого ориентированного $(n-2)$-многообразия M — k**-линейная категория** $\mathcal{Z}(M)$, т.е. категория, в которой $\mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}(M)} \in \mathcal{V}ect(k)$, и композиция стрелок задается билинейными отображениями.

   Для $M = \varnothing$ должна выполняться каноническая эквивалентность $\mathcal{Z}(M) \simeq \mathcal{V}ect(k)$.

5) Для каждого ориентированного $(n-1)$-многообразия M — объект k-линейной категории $Z(M) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{Z}(\partial M))$. Если $\partial M = \varnothing$, то $\mathcal{Z}(\partial M) \simeq \mathcal{V}ect(k)$ по пункту 4), и $Z(M)$ должно быть векторным пространством, которое задается в пункте 3).

Это неудобное определение. Оно напоминает нам определение 2-категории, что намекает на то, что всё должно формулироваться на языке высших категорий (и 2 нужно заменить на n).

Пусть $k \leq n$ — положительные целые числа. Можно определить (слабую) k-категорию $\mathcal{C}ob_k(n)$ примерно так:

- **Объекты**: замкнутые ориентированные $(n-k)$-многообразия.
- **1-морфизмы**: кобордизмы $M \xrightarrow{B} N$, где $\dim B = n - k + 1$, $\partial B \simeq \overline{M} \sqcup N$.
- **2-морфизмы**: «кобордизмы между кобордизмами», т.е. стрелка $B \Rightarrow B'$ между двумя кобордизмами $M \xrightarrow{B, B'} N$ — это многообразие с границей

$$\overline{B} \underset{M \sqcup \overline{N}}{\sqcup} ((\overline{M} \sqcup N) \times [0,1]) \underset{\overline{M} \sqcup N}{\sqcup} B'.$$

- . . . .

Композиция на каждом уровне — это склейка кобордизмов.

$\mathcal{C}ob_0(n)$ можно отождествить с множеством классов диффеоморфности замкнутых n-многообразий.

$\mathcal{C}ob_1(n)$ — это обычная категория $\mathcal{C}ob(n)$.

Настоящее определение категории $\mathcal{C}ob_k(n)$ встречает большие трудности: при склейках нужно иметь *канонические* гладкие структуры, и кобордизмы нужно рассматривать по отношению диффеоморфности. Так что это была просто идея, но не технически верное определение, к которому мы вернемся позже.

Определение. Пусть $\mathcal{C}$ — симметрическая моноидальная n-категория. **Расширенной топологической теорией поля** размерности n со значениями в $\mathcal{C}$ называется моноидальный функтор

$$Z \colon \mathcal{C}ob_n(n) \to \mathcal{C}.$$

5 Гипотеза о кобордизмах

По аналогии с тем, что было с одномерными топологическими теориями поля, хотелось бы, чтобы выполнялся следующий принцип: *расширенная топологическая теория поля определяется своим значением в одной точке, и все расширенные топологические теории поля можно отождествить с* $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.

Этот принцип навеян тем, что локально n-многообразие везде выглядит как $\mathbb{R}^n$. Но буквально он не верен, и нужно внести исправления.

- В случае одномерных топологических теорий поля функтор Z принимал значения только в подкатегории конечномерных векторных пространств. Для произвольной симметрической моноидальной n-категории тоже есть понятие «конечности» объекта (такой объект называется «полностью дуализируемым»; техническое определение будет дано позже).

- Диффеоморфизм окрестности точки на $\mathbb{R}^n$ не канонический, поэтому нужно рассматривать **оснащенные кобордизмы**.

  Для m-многообразия M **оснащением** (*framing*) называется изоморфизм $T_M \oplus \underline{\mathbb{R}^{n-m}} \simeq \underline{\mathbb{R}^n}$ стабилизированного касательного расслоения и тривиального расслоения со слоем $\mathbb{R}^n$.

  Оснащенные кобордизмы образуют n-категорию $\mathcal{Cob}_n^{fr}(n)$.

Соответственно, функтор $\mathcal{Cob}_n^{fr}(n) \to \mathcal{C}$ называется **оснащенной топологической теорией поля**.

Гипотеза Баеза–Долана о кобордизмах. *Пусть $\mathcal{C}$ — симметрическая моноидальная n-категория. Тогда функтор*

$$Z \rightsquigarrow Z(*)$$

задает биективное соответствие между классами изоморфизма оснащенных расширенных топологических теорий поля со значениями в $\mathcal{C}$ и классами изоморфизма полностью дуализируемых объектов в $\mathcal{C}$.

На следующем семинаре предлагается разобрать более точные определения задействованных n-категорий и обсудить гипотезу о кобордизмах.

Список литературы

[1] Jacob Lurie, *On the Classification of Topological Field Theories.* `http://arxiv.org/abs/0905.0465`

[2] John C. Baez, James Dolan, *Higher-Dimensional Algebra and Topological Quantum Field Theory*, `http://arxiv.org/abs/q-alg/9503002`

[3] M.F. Atiyah, *Topological quantum field theory.* Publications Mathématiques de l'IHÉS, 68 (1988), p. 175-186, `http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1988__68__175_0`

[4] П.Н. Мнёв, *Введение в континуальный интеграл для математиков*, `http://club.pdmi.ras.ru/moodle/course/view.php?id=57`

[5] John C. Baez, Aaron Lauda, *A Prehistory of n-Categorical Physics*, `http://arxiv.org/abs/0908.2469`

[6] Joachim Kock, *Frobenius algebras and 2D topological quantum field theories*, `http://mat.uab.es/~kock/TQFT.html`