31.03.2008

Вавилов

1. Bak – Hazrat – Vavilov: relative K_1 is nilpotent-by-abelian
2. Hazrat – Petrov – Vavilov: Relative subgroups in Chevalley groups

В первой работе

Th 1 $U(2n, R, \Lambda)$ – гиперболич. четная баковская группа ($n \geq 3$)

$(I, \Gamma) \trianglelefteq (R, \Lambda)$ – форменный идеал

$U(2n, I, \Gamma)$ – главная конгруэнц-подгруппа

$EU(2n, I, \Gamma)$ – элемент. группа

$$KU(2n, I, \Gamma) = U(2n, I, \Gamma) / EU(2n, I, \Gamma)$$

nilpotent-by-abelian нильпотентного класса $\leq \delta(R) + 1$,

где $\delta(R)$ – размерность Басса – Серра

$$\delta(R) \leq \dim \operatorname{Max}(\operatorname{Cent}(R)),$$

если R к.п. над $\operatorname{Cent}(R)$

– сочетание вида нильп. ряда из диссертации Хазрата и релятивизации из статьи Бака – Вавилова (2000)

Th. 2 $I \trianglelefteq R$, Φ – приведенная неприводимая сист. корней ранга ≥ 2

$$\rightsquigarrow K_1(\Phi, R, I) = G(\Phi, R, I) / E(\Phi, R, I)$$

nilpotent by abelian класса нильп. $\leq \delta(R) + 1$.

$GL(n, R)$

$I \trianglelefteq R \longrightarrow \rho_I : R \longrightarrow R/I$

$$\rho_I : GL(n, R) \longrightarrow GL(n, R/I)$$

$$(x_{ij}) \longmapsto (x_{ij} + I)$$

Но на самом деле идеалы нужно брать не в R, а в $\mathbf{M}(n, R)$

Уровень (A, B) – допустимая пара (admissible pair) – Abe, 1969 – Bak, 1969

короткие корни A_2 3

длинные корни

$$A_p = \langle \xi^p, p\xi \mid \xi \in A \rangle \text{ – идеал в } R$$

$p = 2$, $\Phi = B_l, C_l, F_4$

$p = 3$, $\Phi = G_2$

$A_p \leq B \leq A$ – адд. подгруппа, выдерживает умн. на p-ую степень любого элемента и при $\Phi \neq C_l$ – идеал

1

J. Hurley
M. Stein
1969–71

Описание H:
$[H, E(\Phi,R)] = H$

$E(\Phi,R,A,B) = \langle x_\alpha(\xi), \alpha\in\Phi_s, \xi\in A;\ x_\beta(\zeta), \beta\in\Phi_\ell, \zeta\in B\rangle^{E(\Phi,R)}$

$1 \to G(\Phi,R,I) \to G(\Phi,R) \xrightarrow{\rho_I} G(\Phi,R/I)$

$1 \to C(\Phi,R,I) \to G(\Phi,R) \to G_{ad}(\Phi,R/I)$

Что такое $C(\Phi,R,A,B)$ и $G(\Phi,R,A,B)$

Abe: $C(\Phi,R,A,B) = \{g\in G(\Phi,R) \mid [g,E(\Phi,R)] \le E(\Phi,R,A,B)\}$

$H \le G(\Phi,R)$, норм $E(\Phi,R)$, $\mathrm{rk}\,\Phi \ge 2$, $E(\Phi,R)$ – совершенна

$\rightsquigarrow \exists!\,(A,B):\ E(\Phi,R,A,B) \le H \le C(\Phi,R,A,B)$

$G \curvearrowright V$, $U \le V$

$G(V,U) = \{g\in G \mid \forall v\in V\ gv - v \in U\}$

$G(V,U) \trianglelefteq G$

$G \curvearrowright R^n = V$ $\quad I \trianglelefteq R$

$U = R^n I$

$G(R^n, R^n I)$

$G(F_4,R) \curvearrowright R^{26}$

$\langle e_\alpha, \alpha\in\Phi;\ h_\alpha = [e_\alpha, e_{-\alpha}]$

$\langle h_\alpha A, e_\alpha A, \alpha\in\Phi_s, h_\beta B, e_\beta B, \beta\in\Phi_\ell\rangle = L_{A,B}$ – подмодуль в алг. Ли типа Φ.

$G(L, L_{A,B}) = C(\Phi,R,A,B)$
$\quad C = G$ для F_4, ибо Ad.

$\boxed{\text{Теорема}^1}$ ~~$\mathrm{rk}\,\Phi \ge 2$~~

$E(F_4,R,A,B) \trianglelefteq G(F_4,R)$

$\boxed{\text{Теорема}^2}$ $C(F_4,R,A,B) = \{g\in G(F_4,R) \mid [g,E(F_4,R)] \le E(F_4,R,A,B)\} =$
$= \{\ \ldots\ E\ \ldots\ E(F_4,R,A,B)\} =$
$= \{\ \ldots\ C\ \ldots\ C\ \}$

2

$$
\begin{aligned}
E(n,R,AB+BA) &\le [E(n,R,A),E(n,R,B)] = \quad \text{Вав.-Степанов} \\
&= [E(n,R,A),GL(n,R,B)] \le \\
&\le [GL(n,R,A),GL(n,R,B)] \le \\
&\le GL(n,R,AB+BA).
\end{aligned}
$$