Н.А.Вавилов
28.04.2008

Надгруппы полупростых групп

$G(\Phi, R)$, R – комм. кольцо

$E(\Delta, S)$ – не обязательно неприводима

$\varphi : E(\Delta, S) \longrightarrow G(\Phi, R)$

$$\varphi(E(\Delta,S)) \le \dots \le G(\Phi,R)$$

?

уже для $S=R$ это нетривиальная задача.

$\mathbb{C}$

$\mathbb{F}_q$

что-то еще

K – любое поле

$R_{\mathfrak{m}}$ – лок. кольцо

$\mathbb{Z}$ – дедек. кольцо арифмет. типа

R – комм. кольцо

Классификация макс. подгрупп – не сделана для произв. поля

– есть для всех групп, кроме E_7 и E_8

Для поля естественн. вопросы про порождения, и никуда не обобщаются.

Aschbacher (Inventiones, 1984, On max subgroups...)

– subgroup structure theorem

$\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_8$ – классы Ашбахера

$\mathcal{S}$ – (почти) простая группа в неприводимом представлении

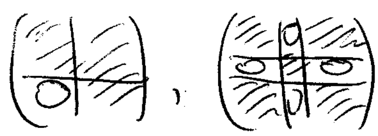
$$G \curvearrowright V$$

естеств. модуль

класс. группа

$\mathcal{C}_1$ – стабилизаторы подпространств

$\mathrm{Stab}_G(U)$, $U \le V$



$\mathcal{C}_2$ – стабилизатор разложения в $\oplus$
 – типа клеточных мономиальных

$\mathcal{C}_1+\mathcal{C}_2$ мы объединяем в один класс
 – это группы, содержащие расщепимый максимальный тор

$\Delta \subseteq \Phi$

$E(\Delta, R) \leqslant \ldots \leqslant G(\Phi, R)$

1980-е годы

$\mathcal{C}_3$ – field extension subgroups

S/R – расширение т.ч.

S – свободный модуль ранга m над R

$E(n,S) \leqslant \ldots \leqslant GL(mn, R)$

$\mathcal{C}_4$ – стабилизаторы разложения $V = U \otimes W$, (U, W – не подобны)

$E(m,R) \otimes E(n,R) \leqslant \ldots \leqslant GL(mn, R)$

$G_2 \cdot A_2 \leqslant E_6$

$G_2 \cdot C_3 \leqslant E_7$

$G_2 \cdot F_4 \leqslant E_8$

$\mathcal{C}_5$ – subfield subgroup

$E(\Phi, S) \leqslant \ldots \leqslant G(\Phi, R) \quad S \leqslant R$

~~$\mathcal{C}_6$~~ – стабилизаторы экстраспециальных подгрупп

$\mathcal{C}_7$ – стабилизаторы разложений $V_1 = U_1 \otimes \ldots \otimes U_s$, $U_i \simeq U_j$

$\mathcal{C}_8$ – классические подгруппы $(\simeq)$

$\Delta \subseteq \Phi$

$E(\Delta, R) \leqslant \ldots \leqslant G(\Phi, R)$

$\Delta^\perp = \varnothing$ и $\forall \alpha \in \Phi \setminus \Delta$ зацепляется за компоненту Δ ранга $\geqslant 2$

Проблема 1 снять условие $2 \in R^*$

Пр. 2 сделать то же самое для $\underline{GU}$

Пр. 3 понизить условие на ранг до $\geqslant 2$ <u>всегда</u>

Пример $A_{\ell-1} \leqslant D_\ell, C_\ell$

$$\left(\begin{array}{c|c} g & 0 \\ \hline 0 & fg^{-t}f \end{array}\right) \qquad f = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix} \qquad g \in E(\ell, R)$$

породить этим и взять нормализатор

$$+\left(\begin{array}{c|c} e & x \\ \hline 0 & e \end{array}\right), \; x \in M(\ell, A), \; \left(\begin{array}{c|c} e & 0 \\ \hline y & e \end{array}\right), \; y \in M(\ell, B) \quad A, B \trianglelefteq R$$

Лемма Goursat

$F \le H \times G$

$\leftrightarrow (A, B, C, D, \varphi)$

$A \le B \le H$

$C \le D \le G$ $\qquad\qquad g \in E(\ell, R)$

Пр. 4

$$\left(\begin{array}{c|c} g & 0 \\ \hline 0 & f g^{-t} f \end{array}\right) \le \ldots \le GU(2\ell, R, \Lambda)$$

инволюция на R

Пр. 5

$$\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g^{-t} \end{pmatrix} \le \ldots \le GL(2\ell, R)$$

Пр. 6

$$\left(\begin{array}{c|c} g & 0 \\ \hline 0 & g \end{array}\right) \le \ldots \le GL(2\ell, R)$$

$e_1 + e_2$

Пр. 7 Описать надгруппы $E(\Delta, R)$ в исключительных группах

$\Delta \subseteq \Phi$ $\quad E(\Delta, R) \le \ldots \le G(\Phi, R)$,

Δ дост. большая

в такой общности — не сделано уже для поля (даже $\mathrm{char} = 0$) (разве что через Тиммесфельда)

Пр. 8 $\quad E(3A_2, R) \le \ldots \le G(E_6, R)$

Пр. 9 $\quad E(D_5, R) \le \ldots \le G(E_6, R)$

Пр. 10 $\quad E(A_5 + A_1, R) \le \ldots \le G(E_6, R)$

Пр. 11 $\quad E(A_7, R) \le \ldots \le G(E_7, R)$ — самый простой

Пр. 12 $\quad E(A_8, R) \le \ldots \le G(E_8, R)$

$\qquad E(D_8, R) \le \ldots \le G(E_8, R)$ — схема проще

Пр. 13 $\quad E(D_4, R) \le \ldots \le G(F_4, R)$

Пр. 14 $\quad E(D_4, R) \le \ldots \le G(E_6, R)$

$$A_2 \leq G_2 \leq B_3 \leq D_4 \leq B_4 \leq F_4 \leq E_6 \leq E_7 \leq E_8$$

$$\uparrow$$

$$E_{7\frac{1}{2}}$$

<u>Deligne</u>

Φ

E_6 $\quad 3A_2,\ D_5,\ A_5+A_1,\ D_4,\ A_4+A_1,\ 2A_2+A_1,\ A_3+2A_1$

E_7 $\quad A_7,\ A_5+A_2,\ E_6,\ A_6,\ A_4+A_2,\ 3A_2,\ D_6+A_1,\ D_5+A_1,$
$(A_5+A_1)',\ (A_5+A_1)'',\ A_3+A_2+A_1,\ A_4+A_1,\ D_4+3A_1$

E_8 $\quad D_8,\ E_6+A_2,\ A_8,\ D_5+A_3,\ 2D_4,\ 2A_4,\ 4A_2,\ E_7,\ D_7,$
$A_7',\ A_7'',\ D_5+A_2,\ D_4+A_3,\ A_7+A_1,\ A_5+A_2+A_4,$
$2A_2+2A_1,\ E_6+A_1,\ A_6+A_1,\ D_6+2A_1,\ D_5+2A_1,\ A_5+2A_1$

F_4 $\quad B_4,\ A_2+\tilde{A}_2,\ D_4,\ C_3+A_1,\ A_3+\tilde{A}_1$

G_2 $\quad A_2$
$\cancel{A_1+\tilde{A}_1}$

$\sim$ – кор. корни