(12.05.2008)

M. Kassabov „Kazhdan constants for $SL_n \mathbb{Z}$" 2005 — С. Синчук

U. Hadad „Uniform Kazhdan const..." 2007

Опр. ① $\rho : \Gamma \longrightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$ — гильбертово пространство

$S \subseteq \Gamma$

$v \in \mathcal{H}$ — (S,ε)-инвариантен, если $\|\rho(s)v - v\| \leq \varepsilon \|v\| \quad \forall s \in S$

② Γ обладает св-вом Каждана $T(S, \varepsilon)$, $(\langle S \rangle = \Gamma)$, если в любом представлении

$\exists\, v \neq 0 :$ v — (S,ε)-инвариантный $\rightsquigarrow \exists\, \tilde{v} \neq 0 :$ $\tilde{v}$ — Γ-инвариантный

$\boxed{\text{Теорема Касабова}}$

$SL_n(\mathbb{Z}) \qquad E_n = \{t_{ij}(1)\}$

$SL_n \mathbb{Z}$ имеет $T(E_n, \varepsilon_n)$, где $\frac{1}{42\sqrt{n}+860} \leq \varepsilon_n \leq \frac{2}{\sqrt{n}}$

$\boxed{\text{Теорема Хадада}}$

$\exists\, k \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0 : \forall n \geq 3$ в $SL_n \mathbb{Z}$ найдется $S \subseteq \Gamma : \langle S \rangle = \Gamma$, $\# S = k$: и $T(S, \varepsilon)$

$\boxed{\text{Лемма}}$ $\rho : \Gamma \longrightarrow \mathcal{U}(H)$

$\exists\, v : \|v\| = 1 \longrightarrow \|gv - v\| < \sqrt{2} \quad \forall g \in \Gamma$

$\Rightarrow \exists\, \tilde{v} \neq 0$ — Γ-инвариантный

Опр $H \trianglelefteq \Gamma$, $\langle S \rangle = \Gamma$

Γ имеет отн. H св-во Каждана $T(S, \varepsilon)$

Если $\exists\, v \neq 0$ — (S,ε)-инвар. $\rightsquigarrow \exists\, \tilde{v}$ — H-инвариантный

---

① $SL_2 \mathbb{Z} \ltimes \mathbb{Z}^2$ отн. $\mathbb{Z}^2$ св-ва $T(\{t_{12}(1), t_{21}(1), t_{13}(1), t_{23}(1)\}, 1/10)$

② Если в $SL_n \mathbb{Z}$

$\exists\, v : \|v\| = 1$

$\|t_{ij}(1)v - v\| < \varepsilon \Rightarrow \forall a \in \mathbb{Z} \quad \|t_{ij}(a)v - v\| < 20\varepsilon$