20.11.2008

Андрей Минченко

О полупростых подалгебрах особых алгебр Ли

$\mathfrak g$ — комплексная полупростая алгебра Ли

$h_1, h_2 \subset \mathfrak g$ — п/п подалгебры

$h_1 \underset{L}{\sim} h_2$ — линейно сопряжены, если $\forall$ представления

$\rho : \mathfrak g \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ алгебры матриц $\rho(h_1)$ и $\rho(h_2)$ сопряжены / Дынкин

$\mathfrak r$ — вещ. классич. алгебра Ли — класс. с точностью до квазисопряженность / Карпелевич

$s_1, s_2 \subset \mathfrak r$ — п/п алг. Ли $\quad \mathfrak r(\mathbb C) = \mathfrak g$

s_1, s_2 — квазисопряжены, если

$$\exists \varphi \in \mathrm{Int}\, \mathfrak g : \ \varphi(\mathfrak r) = \mathfrak r, \ \varphi(s_1) = s_2$$

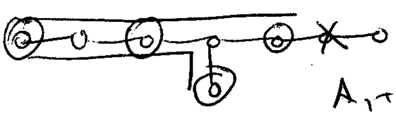
$\mathfrak g$ — классическая $\rightsquigarrow h \subset \mathfrak g$ задаются старшим весам представления в V (V — пространство естественного представления)

Описание п/п подалгебр в особых $\mathfrak g$:

Подалгебра $h \subset \mathfrak g$ называется регулярной, если она нормализуется максимальным тором в $\mathrm{Int}\, \mathfrak g$

Дынкин классифицировал все регулярные подалгебры особых алгебр Ли

Как правило, все одного типа сопр.

Исключения: $\mathfrak g = E_7$  $D_6 + A_1$

$A_1 + A_1 + A_1$

$A_3 + A_1$

$A_5 + A_1$

S-подалгебра $h \subset \mathfrak g$ — подалгебра, не содержащаяся ни в одной регулярной

Дынкин классифицировал все S-подалгебры особых алг. Ли (с точн. до сопр.)

Подалгебры особых ал. Ли можно рассматривать как пары

$$(h, \tilde h), \ \underset{\substack{\downarrow \\ S}}{h} \subset \underset{\substack{\downarrow \\ \text{регулярн.}}}{\tilde h} \subset \mathfrak g$$

(c1) $h_1 \sim h_2$

(c2) $h_1 \underset{L}{\sim} h_2$

(c3) $\rho(h_1) \sim \rho(h_2)$, где ρ — предст. $\mathfrak g$ мин. размерности.

$\boxed{\text{Теор.}}$ (c1) $\Rightarrow$ (c2) $\Rightarrow$ (c3)

Если $\mathfrak g = A_n, B_n, C_n, G_2, F_4$, то (c3) $\Rightarrow$ (c1)

Если $\mathfrak{g} \neq D_n$, то $(C2) \Leftrightarrow (C3)$

$\boxed{\text{Теор}}$ Распадающиеся классы лин. сопр-сти в особых алгебрах Ли:

$\mathfrak{g} = E_6$, $\mathfrak{h} = \underline{A_2^9, \; G_2^3}, \; B_2^3$

$\mathfrak{g} = E_8$, $\mathfrak{h} = A_2^{6'}(1)$

(!) Для не простых (полупростых) такого не бывает

$\mathfrak{g}$ — п/п. алг. Ли; $S(\mathfrak{g})$ — мн-во ее полупростых подалгебр

$G = \mathrm{Int}\,\mathfrak{g}$

Мы изучаем $S(\mathfrak{g})/G$

$\boxed{k = \mathbb{R}}$

$\mathfrak{r}$ — п/п вещ. алг. Ли

$\mathfrak{r}$ обладает разложением Картана $\mathfrak{r} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$

$\uparrow$ Макс. компактная

Оператор Θ: $\Theta|_{\mathfrak{k}} = 1$, $\Theta|_{\mathfrak{p}} = -1$ — автоморфизм — инволюция Картана

$\mathfrak{g} = \mathfrak{r}(\mathbb{C})$

$\mathfrak{r} \longmapsto (\mathfrak{g}, \Theta)$ — биекция между типами полупростых вещ. алгебр Ли и парами (п/п комплексная, класс сопр-сти инволюции)

$S[\mathfrak{g}]/G$ $\quad \mathrm{Int}(\mathfrak{g}) \subset G \subset \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$

$\phantom{S[\mathfrak{g}]/G \quad \mathrm{Int}(\mathfrak{g}) \subset{}} \cup$

$\phantom{S[\mathfrak{g}]/G \quad \mathrm{Int}(\mathfrak{g}) \subset{}} R$ — вещ. форма, $\mathrm{Lie}\, R = \mathfrak{r}$

$S[\mathfrak{r}] \longrightarrow S[\mathfrak{g}]$ — комплексификация полупростой полупрост.

$\downarrow$

$S[\mathfrak{r}]/R \xrightarrow{\nu} S[\mathfrak{g}]/G$ — Нужно описать слои этого отображения, т.е. найти представителей слоев ν.

Частичный порядок на $S(\mathfrak{g})$

$\mathfrak{h} \leqslant \mathfrak{p}$, если $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{p}$ и $N_{\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})}(\mathfrak{h}) \subset N_{\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})}(\mathfrak{p})$

Теорема о редукции

Пусть $\mathfrak{h} \in S(\mathfrak{g})$ $\mathfrak{h} < \mathfrak{p} \in S(\mathfrak{g})$

Пусть $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_s$ – представители слоев ν над $G\mathfrak{h}$

$\mathfrak{p}_i = \mathfrak{q}_i(\mathbb{C}) \in S(\mathfrak{g})$

Если $\mathfrak{p}_i = Ad\, g_i(\mathfrak{p})$, то положим $\mathfrak{h}_i = Ad_{g_i}(\mathfrak{h})$

$$\mathcal{F}(G\mathfrak{h}) \overset{def}{=} \nu^{-1}(G\mathfrak{h})$$

Тогда $\exists$ биекция

$$\bigsqcup_{i=1}^{s} \mathcal{F}_i(G_i \mathfrak{h}_i) \longrightarrow \mathcal{F}(G\mathfrak{h}),$$

где $G_i = N_G(\mathfrak{p}_i)$, $Q_i = N_R(\mathfrak{q}_i)$

$\mathcal{F}_i$ – слои ν_i:

$$S[\mathfrak{q}_i]/_{Q_i} \xrightarrow{\nu_i} S[\mathfrak{p}_i]/_{P_i}$$

Множество $\Omega \subset S(\mathfrak{g})$ – <u>разделяющее</u>, если $\forall \mathfrak{h} \in r(\mathfrak{g})$ $\exists \mathfrak{p} \in \Omega$ $\mathfrak{h} < \mathfrak{p}$, $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{g}$

Задача сводится к следующему:

1. Построить разд. множество Ω
2. Построить μ: $S[\mathfrak{g}] \longrightarrow \Omega$
3. Найти (представители) $\mathcal{F}(G\mathfrak{h})$, где $\mathfrak{h} \in \Omega$
4. Найти $Ad\, P_i$, $Ad\, Q_i$.

Пример:
$\mathfrak{p} = 7A_1$
$\mathfrak{g} = E_7$

$\mathfrak{g}$ – класс $\rightsquigarrow$ $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$, где

Ω_1 – мн-во регулярных подалгебр + в случае $\mathfrak{g} = so_n$ $\mathfrak{h} = so_{2k+1} + so_{n-2k-1}$

Ω_2 – мн-во тензорных произведений матричных алгебр sl_n, so_n, sp_n, где посл. две – только при $\mathfrak{g} \neq sl$

Ω_3 – мн-во простых неприводимых подалгебр

$\mathfrak{g}$ — особая, $\Omega = \Omega_4 \cup \Omega_5 \cup \Omega_6$

Ω_4 — макс. полупростые регулярные

Ω_5 — макс. S-подалгебры + $2G_2 + A_1^8 \subset E_8$

Ω_6 — список: ↖ две копии не переставляются в $G_2 + F_4$

(F_4, D_4), (E_6, D_4), $(E_7, D_4 + 3A_1)$, $(E_7, 7A_1)$, (E_7, D_4^2)

$(E_8, 2D_4)$, $(E_8, 8A_1)$, $(E_8, 4A_2)$, (E_8, A_1^{40})

Пункт (3) — нахождение слоев:

$$S[\mathfrak{r}]/R \xrightarrow{\nu''} S[\mathfrak{r}]/G \xrightarrow{\nu'} S[\mathfrak{g}]/G \qquad \nu = \nu'' \circ \nu'$$

Задача сводится к одной $\quad R = \mathrm{Aut}\,\mathfrak{r}$

$G = R(\mathbb{C})$

~~§~~

Пусть τ — инволюция $\mathfrak{h}$ $\qquad \mathcal{E}(\tau, \theta) = \{\theta' \in \mathrm{Aut}\,\mathfrak{g} :$

θ — инволюция $\mathfrak{g}$ $\qquad \theta' \underset{\mathrm{Int}\,\mathfrak{g}}{\sim} \theta,\ \theta'|_{\mathfrak{h}} \sim \tau\}$

На $\mathcal{E}(\tau, \theta)$ действует $N_G(\mathfrak{h})$ (посредством α)

$\boxed{\text{Утв.}}$ $\mathcal{E}(\tau, \theta)$ непусто $\Longleftrightarrow$ $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{r}$, $\mathfrak{s} \wr \tau$, $\mathfrak{r} \wr \theta$

$\boxed{\text{Теорема}}$ R-орбиты слоя $\nu''(G\mathfrak{h})$ $\longleftrightarrow$ орбиты действия α

$\boxed{\text{Теорема}}$ $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ — макс. п/п или S-подалгебра и $\mathfrak{h} = \mathfrak{s}(\mathbb{C})$, то $\nu''(G\mathfrak{s})$ состоит из одной R-орбиты

$$G_2 \subset D_4 \subset F_4 \subset E_6 \subset E_7 \subset E_8$$