Изотропные группы и структуры йорданова типа

$\boxed{04.12.2008}$
А. [redacted] Ставрова

$\boxed{\text{Опр.}}$ <u>Йорданова алгебра</u> A над полем K, $\operatorname{char} K \neq 2$ — алгебра, удовлетворяющая

1. $xy = yx$
2. $(xy)x^2 = x(yx^2)$

McCrimmon, 1966

$\boxed{\text{Опр.}}$ <u>Квадр. йорд. алгебра</u> A над комм. кольцом R с 1 — это $(A, U, 1)$:

$$U : A \longrightarrow \operatorname{Hom}(A, A) \text{ — квадр. отобр.}$$
$$x \longmapsto U_x : A \to A$$

1. $U_1 = Id_A$ $\qquad // \; V_{x,y}(z) = U_{x+z}(y) - U_x(y) - U_x(z)$
2. $U_x \circ V_{y,x} = V_{x,y} \circ U_x$
3. $U_{U_x(y)} = U_x \circ U_y \circ U_x$

— это действительно обобщение обычных йордановых алгебр:

$$U_x(y) \underset{(\text{Majberg})}{:=} 2x(xy) - x^2 \cdot y$$

$\boxed{\text{Опр.}}$ (Loos, 1974) <u>Йорданова пара</u> над R — это пара R-модулей $V(V^+, V^-)$ и отображение

$$Q : V^{\pm} \times V^{\mp} \longrightarrow V^{\pm}$$
$$(x, y) \longmapsto Q_x(y) \text{ — квадратично по } x \text{ и линейно по } y$$

$\boxed{JP1}$ $D_{Q_x(y), y} = D_{x, Q_y(x)}$ $\qquad // \; D_{x,y}(z) = Q_{x+z}(y) - Q_x(y) - Q_z(y) \; \overset{..}{=} \; \{x, y, z\}$

$\boxed{JP2}$ $Q_x \circ D_{y,x} = D_{x,y} \circ Q_x$

$\boxed{JP3}$ $Q_{Q_x(y)} = Q_x \circ Q_y \circ Q_x$

+ все их линеаризации ($\Leftrightarrow$ <u>над любым расширением</u> $R \longrightarrow R'$!)

$\boxed{\text{Опр.}}$ $v \in V^{\pm}$ — <u>обратим</u> $\Leftrightarrow$ $Q_v : V^{\mp} \longrightarrow V^{\pm}$ обратимо

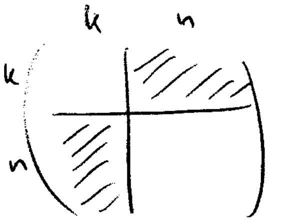
Если $v \in V^-$ — обратим $\rightsquigarrow$ есть йорданова структура на V^+:

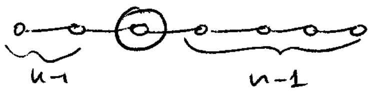
$$\forall x \in V^+ \quad U_x : V^+ \longrightarrow V^+$$
$$y \longmapsto Q_x(Q_v(y)) \in V^-$$

$$1_{V^+} = Q_v^{-1}(v)$$
$$(\text{т.к. } Q_v = Q_{Q_v(1_{V^+})} = Q_v \circ Q_{1_{V^+}} \circ Q_v)$$

Пример $V^+ = M_{k\times n}(R)$, $V^- = M_{n\times k}(R)$

$$Q : V^{\pm} \times V^{\mp} \longrightarrow V^{\pm}$$
$$(x,y) \longmapsto xyx$$





A_ℓ

O. Loos „On algebraic groups defined by Jordan pairs", 1979 [LAG]

Опр. „Элементарной системой" над R называется набор:

$(G; \Psi; H; U^{\pm})$

G — аффинная групповая схема над R

$\Psi : G_m \longrightarrow \mathrm{Aut}(G)$ — действие тора на G

$H, U^+, U^- \leqslant G$ такой, что

1. Ψ действует на H тривиально;
2. U^+, U^- — „векторные группы" (т.е. существуют V^+, V^- — R-модули т.ч. $U^{\pm}(R') = V^{\pm} \otimes R'$ $\forall R'$ над R) на них $\Psi(t)v = t^{\pm 1}(v)$, $v \in V^{\pm}$
3. $\Omega = U^- \cdot H \cdot U^+ \subseteq G$ — открытое плотное подмножество
4. G порождается U^+, H, U^- как алгебраическая группа

$\Rightarrow H$ нормализует U^+, U^- и строятся $X_{\pm A} : V^{\pm} \xrightarrow{\sim} U^{\pm}$

$X_{\pm A}(v) \in G(R)$, $v \in V^{\pm}$

Теорема ([LAG], T. 4.1)

Пусть $(G, \Psi, H, U^{\pm})$ — элементарная система $\Rightarrow \exists!$ структура йордановой пары на (V^+, V^-) такая, что

$\forall (x,y) \in V^+ \times V^-$ $X_A(x) X_{-A}(y) \in \Omega(R)$ тогда и только тогда, когда (x,y) — квази-обратимая пара

и при этом

$$X_A(x) X_{-A}(y) = X_{-A}(y^x) \underbrace{b(x,y)}_{\in H} X_A(x^y)$$

$\boxed{\text{Опр.}}$ Пусть $V=(V^+,V^-)$ — йорданова пара, тогда $(x,y)\in V^\pm\times V^\mp$ квази-обратим, если $B(x,y)=\mathrm{id}_{V^\pm}-D_{x,y}+Q_xQ_y$ — обратимое отображение: $\left(B(x,y): V^\pm \longrightarrow V^\pm\right)$

$\boxed{\text{Замечание}}$ ① (x,y) квазиобратима $\iff$ (y,x) квазиобратима

② Тогда $(B(x,y), B(y,x)^{-1})$ — автоморфизм V

Конструкция Титса — Кантора — Кёхера - . . .

$\boxed{\text{Опр.}}$ Пара лин. отобр. $D=(D_+,D_-)$

$D_\pm: V^\pm \longrightarrow V^\pm$ называется дифференцированием V,

если $D_\pm(Q_x(y))=Q_x(D_\mp(y))+\{D_\pm(x),y,x\}$

$(\Rightarrow D(\{x,y,z\})=\{Dx,y,z\}+\{x,Dy,z\}+\{x,y,Dz\})$

$\boxed{\text{Лемма}}$ ① $Der(V)$ — алгебра Ли относительно $[D,D']=DD'-D'D$.

② $Inder(V)=\left\{\delta_{x,y}=(D_{x,y}-D_{y,x}) \,\middle|\, \begin{array}{l} x\in V^\pm \\ y\in V^\mp\end{array}\right\}$ — подалгебра Ли в $Der(V)$

$\boxed{\text{Теорема}}$ Пусть $V=(V^+,V^-)$ — йорданова пара,

$Inder(V)\leq H \leq Der(V)$, тогда

$L=V^-\oplus H\oplus V^+$ является алгеброй Ли относительно

$$[x,y]=\begin{cases} 0, & x,y\in V^\pm \\ -\delta_{x,y}, & x\in V^\pm,\ y\in V^\mp \\ D(y), & \text{если } x=D\in H,\ y\in V^\pm \\ [D,D'], & x=D\in H,\ y=D'\in H\end{cases}$$

Это „3-градуированная алгебра Ли":

$L_0=H;\ L_1=V^+,\ L_{-1}=V^-$

$\boxed{\text{Замечание}}$ $D_{x,y}(z)=\{x,y,z\}=[z,[x,y]]$

$Q_x(y)=\frac{1}{2}[x,[x,y]]$, если $2\in R^*$

Тогда все аксиомы йорд. пары $\iff$ тождество Якоби (еще $3\in R^*$?!)

$\boxed{\text{Д-во}}$ предыдущей теоремы

$Q_x(y)$: Возьмем $X_A(x)X_{-A}(y) \overset{\in \Omega(R)}{=} X_{-A}(y^x)\,\overset{\in H}{b(x,y)}\,X_A(x^y)$ (как ее построить?)

где $x^y = B(x,y)^{-1}(x - Q_x(y))$ — должно быть

Пусть $X_A(x)X_{-A}(y) = X_{-A}(f_-(x,y))\,b(x,y)\,X_A(f_+(x,y))$

где $f_-(x,y) \in V^-$
$f_+(x,y) \in V^+$

для тех (x,y), которые лежат в $m^{-1}(\Omega)$

$m: \cancel{G \times G}\ U^+ \times U^- \longrightarrow G$
Ω

Заметим, что если присоединить $\varepsilon^2 = 0$: $R \longrightarrow R[\varepsilon]$

$(x, \varepsilon y),\ (\varepsilon x, y) \in m^{-1}(\Omega(R[\varepsilon]))$

Нужно взять $Q_x(y)$: так, чтобы

$$f_+(x, \varepsilon y) = x + \varepsilon Q_x(y)$$
$$f_-(\varepsilon x, y) = y + \varepsilon Q_y(x)$$

Оказывается, что $B(x,y): V^+ \longrightarrow V^+$ — это действие $b(x,y)$ на U^+ сопряжением.

$B(x,y)$ „действует автоморфизмом" $\rightsquigarrow$ аксиомы

~~$Q_{B(x,y)}(z)$~~ $= B(x,y)$

$f_\pm(b(x,y)x', \cancel{\ldots}\ b(x,y)y') = $ ($= B(y,x)^{-1}$)

$= b(x,y)\cdot f_\pm(x',y')$

$\blacksquare$

Обратная конструкция

Теорема Пусть V — йорданова пара

//мн-во квазиобратимых эл-тов — открытая подсхема в $V^+\times V^-$)

$$b: W \hookrightarrow \mathrm{Aut}(V)$$

$$(x,y) \longmapsto (B(x,y), B^{-1}(y,x))$$

подсхема квазиобратимых элементов

Выбрана H:

$$b(W) \le H \le \mathrm{Aut}(V)$$

$\rightsquigarrow$ $\exists$ элементарная система $(G, H, \Psi, U^\pm)$, из которой получается V

$=W(V^-)$

□ Рассмотрим $Z = U^+\times U^-\times H\times U^+$

$\approx W(V^+)$

Определим на этом многообразии отношение эквивалентности E:

$$(x,y,h,u)\sim(x',y',h',u')$$

если $(x-x',y)$ — квази обратимо и выполнены некоторые равенства, которые значат, что

$$((x')^{-1}x)\cdot y = y'\cdot h'\cdot h^{-1}\cdot {}^{h}(u'u^{-1})$$

//(это типа равенство $xyhu = x'y'h'u'$)

На $G = Z\times Z/E$ есть структура группы:

$$h'\cdot[x,y,h,u] = [h'(x), h'(y), h'h, u]$$, например.

H

//т.е. $(0,0,h',0)$

■

J. Faulkner „Jordan pairs and Hopf algebras" 2000 [F1]

„Hopf duals, alg. groups, and Jordan pairs" 2004 [F2]

Пусть A — $\mathbb{Z}$-градуированная алгебра Хопфа

$\mathcal{A}_i \mathcal{A}_j \subseteq \mathcal{A}_{i+j}$; Δ, S, ε — морф. град алгебр отн-но

$$(\mathcal{A}\otimes\mathcal{A})_n = \sum_{i+j=n} \mathcal{A}_i \otimes \mathcal{A}_j$$

$$(\mathcal{A}^{op})_n = \mathcal{A}_n$$

Опр. $x \in \mathcal{A}$ называется <u>примитивным</u> (Lie-like), если

$$\Delta(x) = x\otimes 1 + 1 \otimes x$$

Лемма ① $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ — алг. Ли отн-но $xy - yx$

② $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ — $\mathbb{Z}$-град. алг. Ли с $\mathcal{P}_i = \mathcal{P} \cap \mathcal{A}_i$

Опр. $\{x_i\}_{i=0}^{\infty} = \{x_0 = 1, x_1, x_2, \dots\} \subseteq A$ называется <u>последовательностью разделенных степеней</u>, если

$$\Delta(x_n) = \sum_{i+j=n} x_i \otimes x_j$$

Теорема Пусть $\mathcal{A}$ — $\mathbb{Z}$-град. алг. Хопфа такая, что

① $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{-1} \oplus \mathcal{P}_0 \oplus \mathcal{P}_1$

② $\forall x \in \mathcal{P}_{\pm 1}$ есть п.р.с. $\{x^{(n)}\}$ такая, что

$x_1 = x$ и $x_i \in \mathcal{A}_i \ \forall i \geq 1$

Замечание Одноp. п.р.с. над $x \in \mathcal{P}$ единственна!

// $x'_{n+1} - x_{n+1} \in \mathcal{P}$, $\mathcal{P}_{n+1} = 0$ $(n \geq 1)$

Тогда $(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_{-1})$ — йорданова пара относительно

$$Q_x(y) = x^{(2)}y - xyx + yx^{(2)}$$

Объяснение: $(\lambda x)^{(n)} = \lambda^n x^{(n)}$, $\{\lambda^n x^{(n)}\}$ — о.пр.с. над λx

$$(x+y)^{(n)} = \sum_{i+j=n} x^{(i)} y^{(j)}$$

$\Rightarrow x^{(i)} y^{(j)} = C^i_{i+j}\, x^{(i+j)}$

Если $2 \in R^*$, то $x^{(2)} = \frac{1}{2} x^2$

$$Q_x(y) = \frac{1}{2}[x,[x,y]]$$

<u>Алгебра распределений</u> (см. Jantzen) // (= гипералгебра) cf. Hyperalgebras of ... and alg. gr. – Humphries

G — алг. группа

$e : \operatorname{Spec} R \longrightarrow G$

$m : G \times G \longrightarrow G$

$i : G \longrightarrow G, \quad g \mapsto g^{-1}$

Соотв. ко-операции:

$\tilde{e} : R[G] \longrightarrow R$

$\tilde{m} : R[G] \longrightarrow R[G] \otimes R[G]$

$\tilde{i} : R[G] \longrightarrow R[G]$

Опр. $\operatorname{Dist}^n(G)_{(R)} := \{ f : R[G] \longrightarrow R\text{-лин.} \mid f|_{(\ker \tilde{e})^{n+1}} = 0 \}$

распределение степени $\leq n$

$$\operatorname{Dist}(G)(R) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \operatorname{Dist}^n(G)(R)$$

Опр. G называется <u>инфинитезимально плоской</u>, если

$R[G] / (\ker \tilde{e})^n$ — конечно порожденный проективный R-модуль $\forall n \geq 1$

// Если G-гладкая, то G — инфинитезимально плоская

— считаем, что G - гладкая

Лемма $\operatorname{Dist}(G)$ — <u>алг.</u> Хопфа!

$\square$ $\mu\nu : R[G] \xrightarrow{\tilde{m}} R[G] \otimes R[G] \xrightarrow{\mu \otimes \nu} R \otimes R \simeq R$

Δ — задается $G \longrightarrow G \times G$

$1 : \tilde{e} : R[G] \longrightarrow R$

$\varepsilon :$ ~~R[G]~~ $\varepsilon(\mu) = \mu(1)$

$S : S(\mu) = \mu \circ \tilde{i}$

$\square$ [Ja]

Примеры ① G_a, $R[G]=R[T]$ $\quad \hat{m}: R[T]\to R[T]\otimes R[T]$
$R=\mathbb{Z}$ $\quad T\mapsto T\otimes 1+1\otimes T$

$$\gamma_n(T^m)=\begin{cases}1, & m=n\\ 0, & m\neq n\end{cases} \in Dist(G) \qquad \hat{e}: T\mapsto 0$$

$$\gamma_n\gamma_m=C^n_{n+m}\gamma_{n+m} \to (\gamma_1)^n=n!\,\gamma_n$$

$Dist(G_a)=\mathbb{Z}$-подрешетка в $\mathbb{C}[\gamma_1]$, порожд. $\frac{(\gamma_1)^n}{n!}$, $n\geq 0$

② G_m: $R=\mathbb{Z}$
$Dist(G_m)=\mathbb{Z}$-подрешетка в $\mathbb{C}[\gamma_1]$,
порожденная $C^n_{\gamma_1}=\dfrac{\gamma_1(\gamma_1-1)\ldots(\gamma_1-n+1)}{n!}$

Факт. $R=K$ — поле, $\mathrm{char}\,K=0$
$\Rightarrow Dist(G)\cong U(Lie(G))$
унив. обёрт. алгебра

Пусть G — простая алг. группа внутр. типа, присоединенная, $P\leq G$, $U_P=U^+$ — абелев
$P=L\ltimes U^+$, $U^-=U_{P^-}$

Тогда $\mathcal{L}ie(G)=\mathcal{L}ie(U^-)\oplus\mathcal{L}ie(H)\oplus\mathcal{L}ie(U^+)$
$\mathcal{S}(Dist(G))=$
$Dist(G)=Dist(U^-)\otimes Dist(H)\otimes Dist(U^+)$ как модуль
$\mathbb{Z}$-градуированная алгебра Хопфа

$\psi: G_m \xrightarrow{\sim} Cent(L)^\circ$: $R[H_\alpha]\longrightarrow R[T]$
$R[T]: T\mapsto T^2$
$G_m \curvearrowright Dist(G)$, слагаемые = весовые подпространства
$Dist(G)_n=\{\mu : Dist(G) \mid \psi(t)\cdot\mu=t^n\mu\}$, $n\in\mathbb{Z}$

По пред. теореме на $(Lie(U^+), Lie(U^-))$ есть структура йордановой алгебры.

Почему есть о.п.р.с.? $x\in Lie(U^\pm)$; $R[U^\pm]\cong R[T_1,\ldots,T_k]$

$$\gamma_{ni}(T_j^m)=\begin{cases}1, & n=m,\ i=j\\ 0, & \text{иначе}\end{cases}$$

// тут он свободный — расщепленный случай
// вообще он м.б. к/п проективный, тогда нужно брать координатную систему.

$(\gamma_{1i})^{(n)}=\gamma_{ni}$ и снова $Q_x(y)=x^{(2)}y-xyx+yx^{(2)}$

Обратная конструкция:

$V = (V^+, V^-)$

$\mathcal{A}$ – R-алгебра, порожденная (формально) $x^{(n)}$, $n \geq 0$; $x \in V^\pm$

с соотношениями

① $(\lambda x)^{(n)} = \lambda^n x^{(n)}$

② $(x+y)^{(n)} = \sum\limits_{i+j=n} x^{(i)} y^{(j)}$ $\qquad x, y \in V^\pm$

③ $$\mathrm{ad}_x^{(k)}(y^{(l)}) = \begin{cases} 0, & k > 2l \\ (Q_x(y))^{(l)}, & k = 2l \end{cases}$$

$$\mathrm{ad}_x^{(k)}(y^{(l)}) = \sum_{m+n=k} x^{(m)} y^{(l)} (-x)^{(n)}$$

$\mathcal{A}$ – алг. Хопфа

$R[G] = \mathrm{Hom}_{Lin,cont}(\mathcal{A}, R)$

На $\mathcal{A}$ – лин. топология, заданная окрестностями 0:

окр. 0 : степени $\ker(\varepsilon)$

$G = \mathrm{Spec}\, R[G]$