Stability for hermitian K_1 // A. Bak, Guoping Tang

С. Синчук

R — асс. с 1; $\bar{\cdot} : R \longrightarrow R$

$\overline{ab} = \bar{b} \cdot \bar{a}$ $\qquad \lambda \in Z(R) : \bar{\lambda}\lambda = 1$

$\bar{\bar{a}} = a$

M_R, $B : M^2 \longrightarrow M$ $\quad B(ma, nb) = \bar{a} B(m,n) b$ — полуторалинейная форма

B — λ-эрмитова $\quad B(m,n) = \lambda \overline{B(n,m)}$

$\max^{-\lambda} R = \{a \in R \mid a = \lambda \bar{a}\}$

$\min^{-\lambda} R = \{a + \lambda \bar{a} \mid a \in R\}$ $\Big\rangle$ R-модули

Опр. Λ — форменный параметр, если

1. Λ — add. подгруппа R
2. $a \Lambda \bar{a} \subseteq \Lambda$
3. $\min^{-\lambda} R \subseteq \Lambda \subseteq \max^{-\lambda} R$

B — λ-эрмитова — является Λ-эрмитовой, если $B(m,n) \in \Lambda$

B — невырожденная, если $\quad M \longrightarrow M^*$ — изоморфизм

$m \longmapsto (n \longmapsto B(m,n))$

(B, M) — эрмитово пространство

(M, B) — метаболическое, если $\exists U \leqslant M : \quad U = U^\perp$

Пример Пусть P — к.п. проективный,

B_1 — Λ-эрмитова $\qquad (P \oplus P^*, B)$

$B(f, f_1) = 0$

$f, f_1 \in P^*, p \in P$ $\quad B(f, p) = f(p) \quad p \in P$

$p, p_1 \in P \quad B(p, p_1) = B_1(p, p_1)$

Продолжим инволюцию на матрицы:

$\bar{\cdot} : (a_{ij}) \longmapsto (\overline{a_{ji}})$ — эрмитово сопряжение

$M_{n,k} R \longrightarrow M_{k,n} R$

$a \in M_n R \qquad a$ — λ-эрмитова, если $a = \lambda \bar{a}$

a — Λ-эрмитова, если $a_{ii} \in \Lambda$

$B \longmapsto (B(m_i, m_j))_{ij}$

Опр. $m_1, \dots, m_{2n}$ — метаболический базис (M,B), если $\quad [B] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_1 & & 0 & \lambda & & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & \\ 0 & & a_n & 0 & & \lambda \\ \hline 1 & & 0 & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ 0 & & 1 & & & \end{array}\right)$

$\boxed{\text{Теорема}}$ M — своб. модуль

(M,B) — метаболические $\Leftrightarrow$ $\exists\, m_1,\dots,m_{2n}$ — метаболический базис

см. Bak

$\mathrm{Aut}(M,B)$

$$GH_{2n}(R,a_1,\dots,a_n) = \left\{ \sigma \in GL_{2n}(R) \;\middle|\; \bar\sigma \begin{pmatrix} A & \lambda 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sigma = \begin{pmatrix} A & \lambda 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$n>r$ $\quad GH_{2n}(R, a_1,\dots,a_r, \overbrace{0,\dots,0}^{n-r}) \equiv GH_{2n}(R,a_1,\dots,a_r)$ — обозначение

$$GH_{2n} \longrightarrow GH_{2(n+1)}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \alpha & & \beta & \\ & 1 & & \\ \gamma & & \delta & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$GH(R,a_1,\dots,a_r) := \lim_{\substack{n\to\infty \\ n>r}} GH_{2n}(R,a_1,\dots,a_r)$$

$\boxed{\text{Лемма 1}}$ a) $\sigma = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in GL_{2n}$, $\sigma \in GH_{2n}(\dots) \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} \bar\alpha A \alpha + \bar\gamma\alpha + \lambda\bar\alpha\gamma = A \\ \bar\alpha A\beta + \bar\gamma\beta + \lambda\bar\alpha\delta = \lambda 1 \\ \bar\beta A\beta + \bar\delta\beta + \lambda\bar\beta\delta = 0 \end{array}\right.$$

~~Лемма 2~~

б) $$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} \delta + \bar\beta A & \lambda\bar\beta \\ \alpha\bar A - \bar A\beta A + \bar\lambda\bar\gamma - \bar A\delta & \bar\alpha - A\bar\beta \end{array}\right)$$

$\sigma \in GH_{2n}(\dots)$ $\quad \begin{array}{l} \sigma_{*n} = 1_{*n} \\ \sigma_{n*} = 1_{n*} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \sigma_{*2n} = 1_{*2n} \\ \sigma_{2n*} = 1_{2n*} \end{array}$

$\boxed{\text{Опр.}}$ $C = \{x \in R^r \mid \sum \bar x_i a_i x_i \in \min^\lambda R\}$

$A = \left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & a_r & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right)$ $\quad f \in C \;\; \exists\, f_f \in R \;\; f_f + \lambda\bar f_f = \sum \bar x_i a_i x_i$

C — R-модуль

Лемма 2 $\forall X \in M_{rn}$

$$A = \begin{pmatrix} \begin{matrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_r \end{matrix} & 0 \\ \hline & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_r \end{pmatrix}$$

$$\exists Y \in M_n R : \overline{X} A_1 X + Y + \lambda \overline{Y} = 0$$
$$\Longleftrightarrow X_{*i} \in \mathcal{C}$$

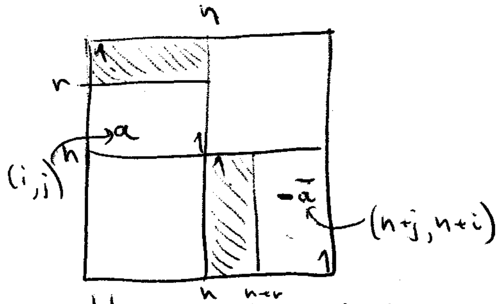
Лемма 3 $\sigma \in GH_{2n}(\ldots)$

$$\sigma = \begin{array}{c} r \\ n-r \\ r \\ n-r \end{array} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \beta_{11} & \beta_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \beta_{21} & \beta_{22} \\ \gamma_{11} & \gamma_{12} & \delta_{11} & \delta_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \delta_{21} & \delta_{22} \end{pmatrix}$$

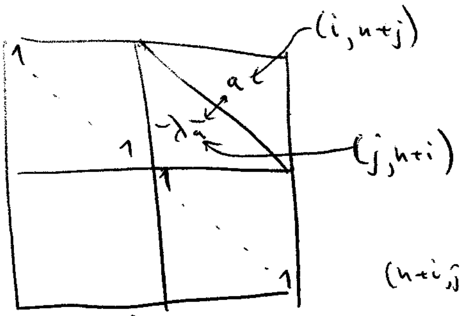
$\Downarrow$

столбцы
$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} - I_r, & \alpha_{12}, & \beta_{11}, & \beta_{12} \\ \overline{\beta_{11}} & \overline{\beta_{21}} & \overline{\delta_{21}} & \delta_{11} - I \end{pmatrix}$$
лежат в $\mathcal{C}$.

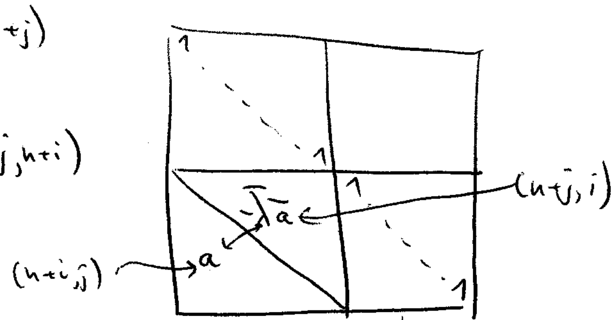
$$\overline{\alpha_{11}} A_1 \alpha_{11} + (\gamma_{11}\alpha_{11} + \overline{\gamma_{21}}\alpha_{21}) + \overline{(\ldots)} = A_1$$
$$\overline{\alpha_{12}} A_1 \alpha_{12} + (\overline{\gamma_{12}}\cancel{\alpha_{12}} + \overline{\gamma_{22}}\alpha_{22}) + \overline{(\ldots)} = 0$$



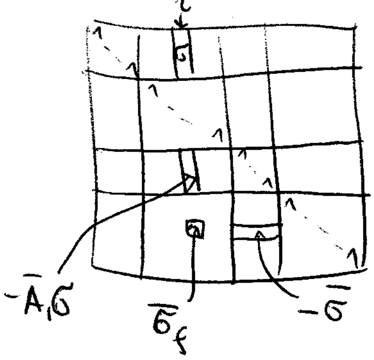
$H\varepsilon_{ij}(a)$ $i > r$, $i \neq j$



$r_{ij}(a)$; $i, j \in \{1, \ldots, n\}$
$i = j \Rightarrow a = -\lambda \bar a$

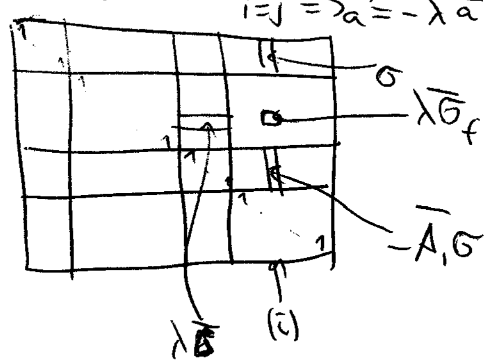


$l_{ij}(a)$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$
$i = j \Rightarrow a = -\lambda \bar a$



$Hm_i(\sigma)$
$\sigma \in \mathcal{C}$
$i > r$

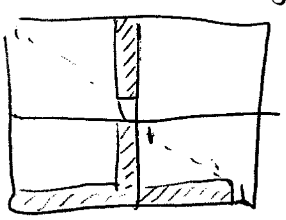
$r_i(\sigma)$

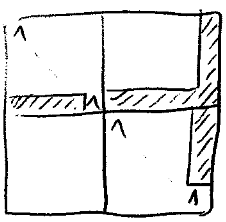


$$EH_{2n}(R, a_1, \ldots, a_r) = \langle \ldots \rangle$$

$$C_n = \langle \{H\varepsilon_{in}(a)\}_{i>r} \cup \{l_{in}(a) \mid 1 \leq i < n\} \cup \{Hm_n(\sigma) \mid \sigma \in \mathcal{C}\} \rangle$$

$$R_n = \langle \{H\varepsilon_{nj}(a) \mid 1 \leq j \leq n\} \cup \{r_{nj}(a) \mid r < j \leq n\} \cup \{r_n(\sigma) \mid \sigma \in \mathcal{C}\} \rangle$$

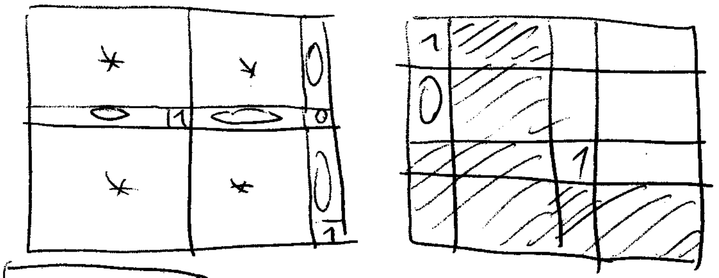
C_n


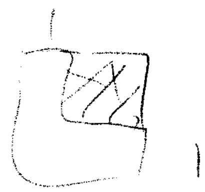

R_n

$P_n = \{\sigma\sigma_1 \mid \sigma \in EH_{2(n-1)}(R, a_1, \dots, a_r),\ \sigma_1 \in C_n\}$

$Q_n = \langle \{Hm_j(\sigma) \mid r<j\le n\} \cup \{H\varepsilon_{ij}(a) \mid r<i,j\le n\} \cup \{\ell_{ij}(a) \mid 1\le i,j\le n\}\rangle$

P_n $\qquad\qquad$ Q_n





$\boxed{\text{Лемма 4}}$

(1) $EH_{2n}(\dots) = \langle R_n \cup C_n \rangle$

$\qquad = \langle P_n \cup \{H\varepsilon_{n,n-1}(a) \mid a \in R\} \rangle$

(2) $GH_{2(n-1)}(\dots)$ нормализует $EH_{2n}(\dots)$

(3) $EH(\dots) \trianglelefteq GH(\dots)$

$\boxed{\text{Опр.}}$ $a \in {}^nR$ — унимод., если $\exists b_1, \dots, b_n : \sum a_i b_i = 1$

a — унимодулярен $\Leftrightarrow$ $a \cdot b$ — унимодулярен (b — обратима)

$\boxed{\text{Опр.}}$ SR_m $\forall a \in {}^{n+1}R$ — унимод. $\Rightarrow \exists b_1, \dots, b_n : \underbrace{(a_1 + a_{n+1}b_1, \dots, a_n + a_{n+1}b_n)}_{\text{унимод.}}$

$\boxed{\text{Лемма}}$ (1) $SR_m \Rightarrow SR_n \quad n \geq m$

(2) R удовл. SR_m, $(\underbrace{u}_{m} | \underbrace{v}_{k} | \underbrace{w}_{l})$ — унимодулярен

$\Rightarrow \exists b \in M_{km} : (u + vb, w)$ — унимодулярна

$\max^\lambda R = \{a \in R \mid a = -\lambda \bar{a}\}$

$\min^\lambda R = \{a - \lambda \bar{a} \mid a \in R\}$

Λ — ф. п.

$M_m \bar{\Lambda} = \{a \in M_m R \mid a = -\lambda \bar{a},\ a_{ii} \in \Lambda\}$

$\boxed{\text{Опр.}}$ ΛS_m — если оно удовл. SR_m и $\forall$ пары $a, b \in {}^{m+1}R : (a, b)$ — унимод.

$\exists \gamma \in M_{m+1} \bar{\Lambda} : a + b\gamma$ — унимодулярен

$\boxed{\text{Лемма 5}}$ ① $\Lambda S_m \Rightarrow \Lambda S_n$

$\boxed{\text{Лемма 6}}$ $A S_m \Rightarrow \Lambda S_m$

$\Lambda U S_m \Rightarrow \Lambda S_m$

$R,\ S \subseteq R,\ \mathcal{M}_S = \{ I_R \leq R \mid I_R \supseteq S \}$

$$\mathcal{J}(S) = \begin{cases} R, & \mathcal{M}_S = \varnothing \\ \bigcap \mathcal{M}_S, & \mathcal{M}_S \neq \varnothing \end{cases}$$

$AS_n : \forall (a_1, \dots, a_{m+1})\ \exists\, b_1, \dots, b_m : \mathcal{J}(\{a_1, \dots, a_{m+1}\}) = \mathcal{J}(\{a_1 + a_{m+1} b_1, \dots\})$

$\boxed{\text{Теорема}}$ $R, (\max^{\lambda} R)\, S_m \rightsquigarrow \forall n > m + r$

$KH_{1,n}(R, a_1, \dots, a_r) = GH_{2n}(\,.\,) / EH_{2n}(\dots)$ – группа

$KH_{1,n-1} \longrightarrow KH_{1,n}$

$KH_{1,n} \xrightarrow{\simeq} KH_{1,n+1}$

$\boxed{\text{Лемма}}$ $n \geq r + m + 1$

$\Rightarrow \forall \sigma \in GH_{2n}(\dots)\ \exists \tau \in Q_n : (\sigma\tau)_{nn} = 1$

$\square$ $\sigma_{n*} = (\overset{r}{\overbrace{v_1}}, \overset{n-r}{\overbrace{v_2}}, \overset{r}{\overbrace{w_1}}, \overset{n-r}{\overbrace{w_2}})$ – унимод.

$\Rightarrow \exists x_1 \in M_{r,n-r} R : (\underbrace{v_1 x_1}_{n-r}, \underbrace{v_2}_{n-r}, \underbrace{w_1}_{r}, \underbrace{w_2}_{n-r})$ – унимод.

$\boxed{\text{Теорема}}$ (PRQ – разложение)

$n \geq r + m + 2 \rightsquigarrow \forall g \in EH_{2n}(\dots) \Rightarrow \exists \begin{matrix} \sigma \in P_n \\ \alpha \in R_n \\ \tau \in Q_n \end{matrix}$