Строение изотропных редуктивных групп

07.09.09
Н. Ставрова

R — комм. асс. кольцо с 1

G — схема Шевалле–Демазюра, расширенная с $\mathbb{Z}$ (над R)

1961, 1964, 1970

$SL_n(R)$ $\quad$ $G(R)$ — группа Шевалле

$G \longrightarrow \Phi$ — система корней

$X_\alpha = \{x_\alpha(\xi) \mid \xi \in R\}$, $\alpha \in \Phi$

— корневые подгруппы

$x_\alpha(\xi)$ — элементарный корневой унипотент

$$X_\alpha = \left\{\begin{pmatrix} 1 & & 0^* \\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{pmatrix}\right\} \quad x_\alpha(\xi) = \begin{pmatrix} 1 & & 0\ \xi \\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{pmatrix} = t_{ij}(\xi)$$

$$E_n(R) = \langle t_{ij}(\xi)\rangle$$

$$E(R) = \langle x_\alpha(\xi),\ \alpha\in\Phi,\ \xi\in R\rangle \text{ — элем. подгруппа}$$

$$\underset{\alpha\neq-\beta}{[x_\alpha(\xi), x_\beta(\eta)]} = \prod_{i\alpha+j\beta\in\Phi} x_{i\alpha+j\beta}(N_{\alpha\beta ij}\,\xi^i\eta^j)$$

$$(*)\quad x_\alpha(\xi)x_{-\alpha}(\eta) = x_{-\alpha}\left(\frac{\eta}{1+\xi\eta}\right) h_\alpha(1+\xi\eta)\, x_\alpha\left(\frac{\xi}{1+\xi\eta}\right)$$

$(*)$ имеет смысл $\Leftrightarrow$ $1+\xi\eta \in R^*$

G — редуктивная групповая схема над R

(= гладкая агс такая, что все ее слои — ред. группы

$\forall s \in \operatorname{Spec} R$ $\quad G_{\overline{k(s)}}$ — ред. группа (обычная, см. Хамфри)

т.е. связная (афф.) гладкая алг. группа

т.ч. $R_u(G_{\overline{k(s)}}) = e$)

Вопросы

1. Что такое элементарные корневые унипотенты G?
2. Что такое система корней G?
3. Что мы знаем про $E(R)$?
4. Есть ли формулы $(*)$?

Что было известно?

Ред. г.с. над $R=K$ — поле

1965 Борель, Титс — обобщили понятие системы корней

· если нет расщепимого максимального тора

но есть максимальный расщепимый тор $S \subseteq G$

$\Phi(G,S)$ — относ. система корней

$$S \curvearrowright \underset{\cong\mathfrak{g}}{\mathrm{Lie}(G)} = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}^n} \mathfrak{g}_i \qquad // \dim S = n.\quad S \cong \mathbb{G}_m^n$$

SL_n: $\underbrace{\begin{pmatrix} * & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix}}_{n} \cong \mathbb{G}_m^{n-1}$

У нас — <u>изотропные</u> ред. группы

G — <u>изотропна</u> $\iff$ G содержит собственную параболическую подгруппу

$\iff \exists$ нетривиальный расщепимый тор $\mathbb{G}_m^k \hookrightarrow G$ нетрив.

$\iff G^{ad}$ содержит $S \cong \mathbb{G}_m^k$

$\Phi(G,S)$ — мн-во ненулевых хар-ров, для кот. пространства $\mathcal{L}_i \neq 0$

$\alpha \longmapsto U(\alpha) \lneq G$ — связная унипотентная

$\mathcal{L}ie(U(\alpha)) = \bigoplus_{k>0} \mathcal{L}ie(G)_{k\alpha}$ — м.б. $\alpha, 2\alpha \in \Phi(G,S)$

$\mathcal{L}ie(X_\alpha) = \mathcal{L}ie(G)_\alpha$

$S_{\bar{k}} \subseteq T$ — расщепимый макс. тор

$\Phi = \Phi(G,T)$ — исходная

$\subseteq X^*(T)$

$\Phi(G,S) \subseteq X^*(S)$ — относительно

$\rightsquigarrow X^*(T) \xrightarrow{\pi} X^*(S)$, $X^*(T) \cong \mathbb{Z}^8$, $X^*(S) \cong \mathbb{Z}^2$

$\rightsquigarrow \Phi(G,S) \cong \pi(\Phi) \setminus \{0\}$

$P \supseteq L = L_P = Cent(S)$

$\mathcal{L}ie(P) = \bigoplus_{\alpha \in \Phi_S^+} \mathcal{L}ie(G)_\alpha$

$\mathcal{L}ie(L) = \mathcal{L}ie(G)_0$

$\mathcal{L}ie(U) = \bigoplus_{\alpha \in \Phi_S^+} \mathcal{L}ie(G)_\alpha$, $U = U_P$

$\mathbb{Z}\Phi \longrightarrow \mathbb{Z}\Phi / \langle \alpha \in J,\ \sigma(\alpha) - \alpha,\ \sigma \in \Gamma \rangle$

$\Phi_S = \pi(\Phi) \setminus \{0\}$

$k \subseteq L$

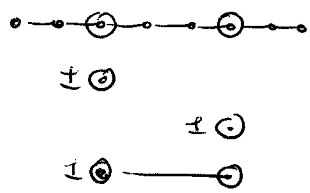
$\Gamma = Gal(L|k)$

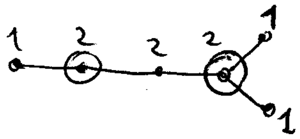
Γ действует на корнях G_L

Отсюда появляется $*$-действие на простых корнях

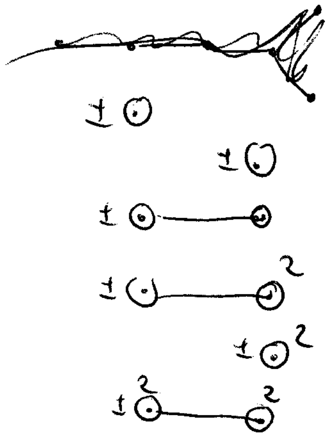
$$Gal(L|k) \longrightarrow Aut(D)$$

Борель–Титс: Φ_S — система корней

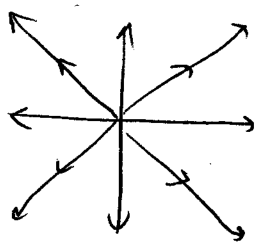




D_ℓ



BC_2



$G|_R$ — может не быть max расщепимого тора

(только если R — связное полулокальное кольцо — SGA 3)

Если G — изотропна

$P \leq G$

$\mathbb{G}_m \curvearrowright G$

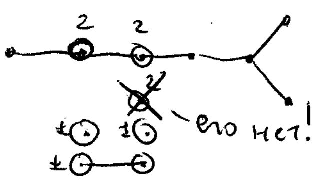
$R = \bigoplus_{i \in I} R_i$ $\quad I$ — конечно

$P \longleftrightarrow S \subseteq G^{ad}$ — тор

$\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m \cong S$

$\Phi_P = \Phi_S$ — система относительных корней

$\Phi_S = \{\alpha \overset{\neq 0}{\in} X^*(S) \mid Lie(G)_\alpha \neq 0\}$ — не обяз. система корней!



$S \simeq \mathbb{G}_m$

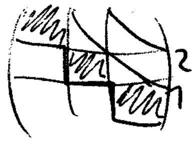
$$\mathrm{Lie}(G) = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{Lie}(G)_i$$

$P \supseteq U, L$ $\qquad\qquad$ $P^- \supseteq U^-, L$

$\mathrm{Lie}(L) = \mathrm{Lie}(G)_0$

$$U = U_1 \supseteq U_2 \supseteq \dots \supseteq U_k = \{e\}$$

$$\mathrm{Lie}(U_k) = \bigoplus_{i\geq k} \mathrm{Lie}(G)_i$$



$[u,u]$

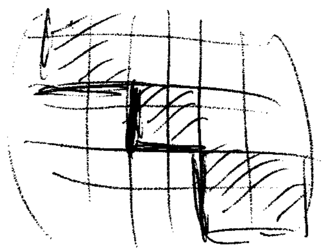
$$\begin{array}{ccccc} W(\mathrm{Lie}(G)_k) & \xrightarrow{X_k} & U_k & \xrightarrow{\pi} & U_k/U_{k+1} \\ \| & & & & \wr\| \\ V_k & & & & W(\mathrm{Lie}(G)_k) \end{array}$$

X_k — S-эквивариантны сечения

$$X_k : \underset{\displaystyle \mathrm{Spec}(\mathrm{Sym}^\bullet(V_k^*))}{\underset{\|}{W(V_k)}} \hookrightarrow U$$

$S \cong \mathbb{G}_m^k \rightsquigarrow \forall A \in \Phi_S$ $\qquad$ $\mathrm{Lie}(P) = \bigoplus_{A\in\Phi_S^+ \cup \{0\}} \mathrm{Lie}(G)_A$

$$X_A : W(\mathrm{Lie}(G)_A) \hookrightarrow U$$



и есть такие же для отрицательных $(\measuredangle P^-)$

Может быть, что $X_A(v)X_A(u) \neq X_A(u+v)$

$$= X_A(u+v)\, X_{2A}(q(u,v))$$

$$q : W(V_A)\times W(V_A) \longrightarrow W(V_{2A})$$

$$[X_A(u), X_B(v)] = \prod_{iA+jB\in\Phi_S} X_{iA+jB}(N_{ABij}(u,v))$$

$A \nparallel B$

$$N_{ABij} : W(V_A)\times W(V_B) \longrightarrow W(V_{iA+jB})$$

однородные степени i по первому и j по второму

$$E_P(R) = \langle U_P^+(R), U_P^-(R) \rangle \underset{\text{локально в топ. Зар.}}{=} \langle X_A(v), A \in \Phi_S, v \in V_A \rangle$$

P — строго собственная, если

$\pi : G \longrightarrow G^{ad} = \prod G_i$ ← п/простые неразложимые а.г.

$\pi(P)_i$ — собственная параболическая подгруппа

$\boxed{\text{Теорема 1}}$

Пусть G — (изотропная) редуктивная групповая схема над R. т.ч. $\forall M \trianglelefteq R$ — макс. идеала:

$(G_{R_M})_i^{ad}$ содержит расщепимый тор ранга ≥ 2

Тогда $E_P(R)$ ($\in E(R)$) не зависит от выбора строго собственной параболической подгруппы $P \subseteq G$

В частности, $E(R) = E_P(R)$ нормальна