$\mathbb{G}_m$-действия на многообразиях

14.09.2009
В.А. Петров

$$\mathbb{G}_m(R) = R^\times$$

F-поле $\rightsquigarrow$ $\mathbb{G}_m \simeq F^\times$ – почти что.

Проективные многообразия:

$$\mathbb{P}^n_F = \{[x_0:x_1:\ldots:x_n],\ x_i\in F,\ \text{не все равны } 0\} \Big/ [x_0:x_1:\ldots:x_n] = [\alpha x_0, \alpha x_1, \ldots, \alpha x_n]\}$$

$F_1,\ldots,F_m$ – однородные многочлены от $x_0,\ldots,x_n$

$$X = \{[x_0:\ldots:x_n] \mid F_j(x_0,\ldots,x_n)=0\}$$

Например, $x_0^2+x_1^2+\ldots+x_n^2=0$ — проективная квадрика

Мы хотим, чтобы элементы $F^\times$ действовали на X

$\lambda\in F^\times$, $x\in X(F)$

$$\left.\begin{aligned}&\lambda\cdot x\in X(F)\\ &\lambda\cdot(\mu\cdot x) = (\lambda\mu)\cdot x\end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathbb{G}_m \text{ действует на } X$$

X должно быть гладким

$$X^{\mathbb{G}_m} = \{x \mid \lambda\circ x = x\ \forall\lambda\in F^\times\}$$

— это гладкое многообразие

$$X^{\mathbb{G}_m} = Z_1\sqcup Z_2\sqcup\ldots\sqcup Z_k$$

$x\in X(F)$

$\lim\limits_{\lambda\to0}\lambda\cdot x$ – как это считать?

$\mathbb{A}^1(F)=F$

$\lambda\longmapsto\lambda\cdot x$

Это отображение можно доопределить на всю прямую, причем единственным образом

На самом деле у нас действие полиномиальное:

$$\lambda\cdot[x_0:\ldots:x_n] = [g_0(x_0,\ldots,x_n,\lambda,\lambda^{-1}):\ldots:g_n(x_0,\ldots,x_n,\lambda,\lambda^{-1})],$$

где g_i – многочлены от x_i, λ и λ^{-1}

Домножим на какую-то большую степень λ так, чтобы знаменатели исчезли, но не слишком, чтобы остался коэффициент, не делящийся на λ.

Потом подставляем $\lambda=0$ – получим предел

$\lim\limits_{\lambda\to0}\lambda\cdot x$ – неподвижная точка для любой x.

Рассмотрим отображение

$\pi: X(F) \longrightarrow X^{\mathbb{G}_m}(F)$ — оно не алгебраическое

$x \longmapsto \lim\limits_{\lambda \to 0} \lambda \cdot x$

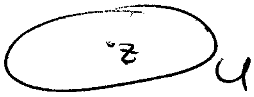
<u>Теорема</u> (Białynicki-Birula, 1973)

$X = \bigsqcup X_i^+$, где $X_i^+ = \pi_i^{-1}(Z_i)$

Тогда ① $\pi: X_i^+ \longrightarrow Z_i$ — алгебраические отображения, более того, аффинные расслоения.

т.е. у $z \in Z_i$ есть окрестность U

т.ч. прообраз U изоморфен $U \times \mathbb{A}^{r_i}$



② Можно упорядочить Z_i т.ч.

X_1^+ — замкнутое подмногообразие в X $\qquad X_1^+ = Z_1^+$

$X_1^+ \cup X_2^+$ — замкнутое

$\vdots$

$X_1^+ \cup \ldots \cup X_m^+$ — замкнутое

H^* — теория когомологий $\sim$

$H^*(X) = \bigoplus H^{*-r_i}(Z_i)$.

$M(X) = \bigoplus M(Z_i)(r_i)$ — для мотивов

$X = \mathbb{P}^2 \quad [x_0 : x_1 : x_2]$

$\lambda \cdot [x_0 ; x_1 ; x_2] = [x_0 ; \lambda x_1 : \lambda^2 x_2]$

$X^{\mathbb{G}_m}$

$Z_1 = \{x_1 = x_2 = 0\} = \{[1:0:0]\}$

$Z_2 = \{x_0 = x_2 = 0\} = \{[0:1:0]\}$

$Z_3 = \{x_0 = x_1 = 0\} = \{[0:0:1]\}$

Если $x_0 \neq 0$, $\lim\limits_{\lambda \to 0} \lambda \cdot x = [1:0:0] \longrightarrow \mathbb{A}_F^2$ плоскость

Если $x_0 = 0, x_1 \neq 0$, $\lim\limits_{\lambda \to 0} \lambda x = [0:1:0] \longrightarrow \mathbb{A}_F^1$ прямая

Если $x_0 = x_1 = 0, x_2 \neq 0$, $\lim\limits_{\lambda \to 0} \lambda x = [0:0:1] \longrightarrow \mathbb{A}_F^0$ точка

$\rightarrow \mathbb{P}^2 = pt \cup \mathbb{A}^1 \cup \mathbb{A}^2$

$pt, \; pt \cup \mathbb{A}^1 = \mathbb{P}^1, \; pt \cup \mathbb{A}^1 \cup \mathbb{A}^2$

$X = \{x_0 x_n + q(x_1, \dots, x_{n-1}) = 0\}$

квадрика q — невырожденная

$$\lambda \cdot [x_0 : x_1 : \dots : x_{n-1} : x_n] = [\lambda x_0 : x_1 : \dots : x_{n-1} : \lambda^{-1} x_n]$$

$X^{\mathbb{G}_m}$ — ?

① Все, кроме x_0, равны 0 $\leadsto \overset{Z_1}{\{[1:0:\dots:0]\}}$
$x_1 = \dots = x_n = 0$

② $x_0 = x_n = 0 \longrightarrow Z_2$ — меньшая квадрика
$= \{[0:x_1:\dots:x_{n-1}:0] / q(\dots) = 0\}$

③ $x_0 = \dots = x_{n-1} = 0 \longrightarrow Z_3 = \{[0:0:\dots:0:1]\}$

Итак:

- $x_n \neq 0 \leadsto Z_3 \quad \leadsto x_1, \dots, x_{n-1}$ м. брать произвольными
- $x_n = 0$, но $(x_1 : \dots : x_{n-1}) \neq (0, \dots, 0) \longmapsto Z_2$
- $x_n = 0 = x_1 = \dots = x_{n-1} \longmapsto Z_1$;

$$\to X = pt \cup Z_2 \times \mathbb{A}^1 \cup \mathbb{A}^{n-1}$$

II. Йордановы алгебры

$M_n(\mathbb{C})$, эрмитовы: $a^* = a$ // $a^* := {}^t\bar{a}$

$(a+b)^* = a+b$

$(\lambda a)^* = \lambda a$

$a^* = a$, $b^* = b \leadsto (ab)^* = b^* a^* = ba$

$Q_a b = aba$ (Йордан делал не так)
(МкКриммон)

Опр. Квадратичная Йорданова алгебра (над F) — векторное пространство J с операцией $Q_a\{b\}$, линейная по b, квадратичная по a + аксиомы

$$Q_{Q_a b} c = Q_a Q_b Q_a c$$

Простые йордановы алгебры (т.е. без внешних идеалов)

Классификация: ① D — тело ассоц. к/м, над полем над F, $\bar{\ }$ — инволюция

$H_n(D) = \{a \in M_n(D) \mid a^* = a\}$

② Спин-фактор

q — невырожд. квадр. форма

$q(v)=1$ ⇝ на V есть стр-ра простой йордановой алгебры

③ $H_3(\mathbb{O})$ и ее скрученная форма

октонионы, $\bar{\ }$ — инволюция

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 8 & 8 \\ \swarrow & 1 & 8 \\ \swarrow & \swarrow & 1 \end{pmatrix} \to \dim H_3(\mathbb{O})=27 \qquad q(a\times b, c) = t(a,b,c)$$

$$\left.\begin{matrix} a\in M_{p,q}(F) \\ b\in M_{q,p}(F)\end{matrix}\right. \rightsquigarrow aba\in M_{p,q}(F)$$

<u>Йорданова пара</u>

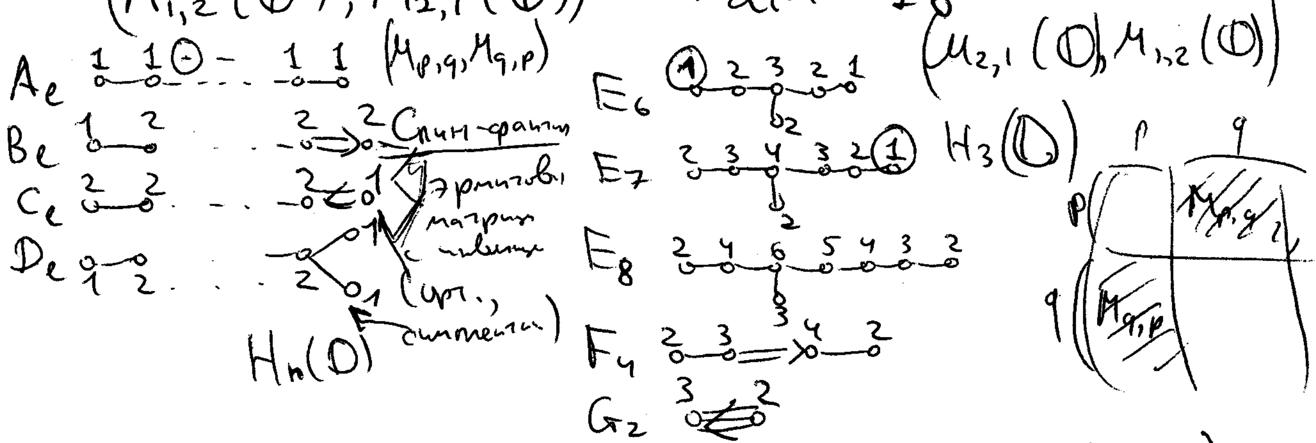
(J^+, J^-)

$Q_a b$: $\quad a\in J^+,\ b\in J^- \Rightarrow Q_a b\in J^+$

$\quad a\in J^-,\ b\in J^+ \Rightarrow Q_a b\in J^-$

$(M_{p,q}(F), M_{q,p}(F))$

$(M_{1,2}(\mathbb{O}), M_{2,1}(\mathbb{O})) \longrightarrow \dim = 16$

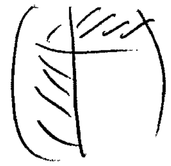


Классификация: д. Дынкина + обвести единицу (Loos)

Оттмар Лоос

III. Апофеоз

Автоморфизмы йордановых пар:

 $(GL_p \times GL_q)/_{\text{общий центр}}$

$$\mathrm{Aut}(H_3(\mathbb{O}), H_3(\mathbb{O})) = E_6 \quad (\text{группа типа } E_6)$$

$$\mathrm{Aut}(H_3(\mathbb{O})) = F_4$$

Проективные однородные многообразия

G — простая алг. группа $\quad G \curvearrowright X$ — проективно : $G \times X \longrightarrow X$

Если $G(\bar{F})$ действует транзитивно на $X(\bar{F})$,

X называется проективным однородным

Классификация: д. Дынкина + набор вершин

$$X = E_6/P_6$$ 

$$J = H_3(\mathbb{O})$$

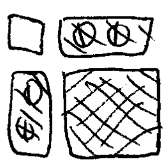
$\mathbb{P}(J) \quad \{[x] \in E_6/P_6 \mid [Q_x(a)] = [x] \ \forall a \in J\}$

— элементы ранга 1

$Q(x, x, y) = 0 \ \forall y \qquad \mathbb{O}\mathbb{P}^2$ — плоскость Кэли

— октавная плоскость

Разложение Пирса

 $J = Fe \oplus M_{2,1}(\mathbb{O}) \oplus H_2(\mathbb{O})$

$\wr$

спин-фактор

$\forall$ элемент J — тройка $[\alpha : b : c]$

$F \qquad M_{2,1}(\mathbb{O})$

$1 \qquad 16 \qquad 10$

$$\lambda \cdot [\alpha : b : c] = [\lambda\alpha : b : \lambda^{-1} c]$$

$$[\lambda^{-1}\alpha : b : \lambda c]$$

$$E_6/P_6 \supset \{\alpha=0\} \supset \{\alpha=0, b=0\} \simeq D_5/P_1 \text{ — квадрика}$$

$$\{\alpha=0\} \xrightarrow{\mathbb{A}^{16}} \{b=0, c=0\} = pt \qquad \{\alpha=0, b=0\} \xrightarrow{\mathbb{A}^{5}} \{\alpha=0, c=0\} = D_5/P_5$$

$\dim E_6/P_6 = 16$

Двойственная фильтрация:

$$E_6/P_6 \supset \{c=0\} \supset \{c=0, b=0\} = pt$$

$$\xrightarrow{\mathbb{A}^{8}} \{b=0, \alpha=0\} = D_5/P_1 \qquad \xrightarrow{\mathbb{A}^{1}} \{c=0, \alpha=0\} = D_5/P_5$$

$$Q_b(e) = 0$$