21.09.09
В.А. Петров

Уравнения на однородные проективные многообразия

G $\quad X$ – гладкие проективные $\subset \mathbb{P}^n$

$$G \times X \longrightarrow X$$

$\forall \bar{F}$ $\quad x, y \in X(\bar{F})$ $\ \exists g \in G(\bar{F}) : y = gx$

$X(F) \neq \varnothing$

$X = G/P$, $\ P$ – параболическая

$F = \mathbb{R}$

$X = \{x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 0\}$

O_{n+1}

__Теорема Шевалле__

$\exists$ гомоморфизм $G \longrightarrow GL(V)$:

$$P = \mathrm{Stab}_G(\langle e \rangle)$$

Например, E_6/P_6 – в 27-мерном

E_7/P_7 – в 56-мерном

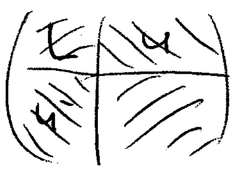
E_8/P_8 – в 248-мерном

G/P – орбита $\langle e \rangle$ в $\mathbb{P}(V)$

$B\langle e \rangle = \langle e \rangle \rightsquigarrow e$ – __вектор старшего веса__

рецепт нахождения уравнений

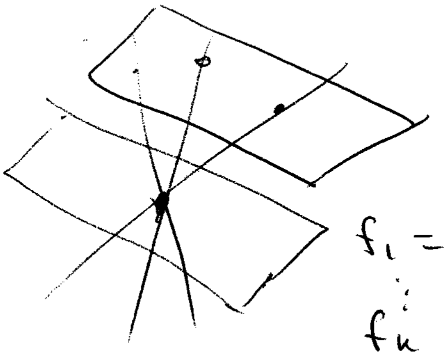
$P = L \ltimes U$



$U^-\langle e \rangle$ ① $\forall g, h \in U^-$ $\quad ge \neq he$

$\cong \mathbb{A}^m$ $\quad \mathrm{Im}\, U^-$ – __большая клетка__ G/P

② $\overline{U^-\langle e \rangle} = G/P$



$$\mathbb{P}^n = \mathbb{A}^n \cup \mathbb{P}^{n-1}$$

$F_1, \dots F_k$ — однор., задают замыкание в $\mathbb{P}^n$

$$\left.\begin{array}{l} f_1 = F_1(1, \dots) \\ \vdots \\ f_k = F_k(1, \dots) \end{array}\right\} \text{в } \mathbb{A}^n$$

но просто гомогенизировать нельзя

Знаем идеал $(f_1, \dots, f_k) = (g_1, \dots, g_\ell)$

+ нужно добавить какие-то следствия f_i

Ответ: надо зафиксировать полный порядок на одночленах, совместимый со степенью (например, deg lex), посчитать базис Грёбнера $(g_1, \dots, g_\ell)$ и взять гомогенизацию его

GL_5 д. на F^5 на $\Lambda^2 F^5$

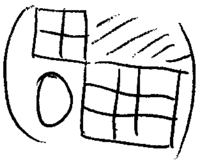
e_1, e_2, e_3, e_4, e_5

$e_i \wedge e_j \quad i<j$

$e_i \wedge e_i = 0$

$e_i \wedge e_j = - e_j \wedge e_i$

$e_1 \wedge e_2$ — вектор старшего веса



$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & & 0 & \\ 0 & 1 & & & \\ \hline a & d & 1 & 0 & 0 \\ b & e & 0 & 1 & 0 \\ c & f & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$e_1 \wedge e_2 \longmapsto (e_1 + ae_3 + be_4 + ce_5) \wedge (e_2 + de_3 + ee_4 + fe_5)$$

коэффициенты при $e_i \wedge e_j$ — x_{ij}

$x_{12} = 1$ | $\cancel{x}$

$x_{13} = d$ | $x_{23} = -a$

$x_{14} = e$ | $x_{24} = -b$ | $(x_{12})x_{34} = ae - bd = \underline{x_{13}x_{24}} - x_{14}x_{23} = f_1$

$x_{15} = f$ | $x_{25} = -c$ | $(x_{12})x_{35} = af - cd = \underline{x_{13}x_{25}} - x_{15}x_{23} = f_2$

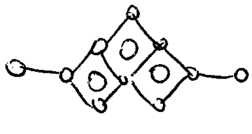
$(x_{12})x_{45} = bf - ce = \underline{x_{14}x_{25}} - x_{15}x_{24} = f_3$

$$x_{13} > x_{14} > x_{15} > x_{23} > x_{24} > x_{25} > x_{34} > x_{35} > x_{45}$$

$$S(f_1, f_2) = x_{25} f_1 - x_{24} f_2 = \underline{-x_{14}x_{23}x_{25}} + x_{15}x_{23}x_{24} - x_{34}x_{25} + x_{35}x_{24}$$

$$\xrightarrow[+x_{23}f_3]{} -x_{23}x_{45} - x_{34}x_{25} + x_{35}x_{24} = f_4$$

$$S(f_2, f_3) \longrightarrow x_{15}x_{34} - x_{14}x_{35} + x_{13}x_{45} = f_5$$



E_6/P_6 – в 27-мерном

$L \approx \mathrm{Spin}$

$1+16+10$ — векторное; 16 — полуспинорное; 1 — вектор старшего веса

$U^-\langle e\rangle = [1 : x : Q_x(e)]$ $\qquad [\alpha : b : c]$, $e = [1:0:0]$

$1 : x : f(x)+y :$ $\qquad U^-/[U^-,U^-]$

$g(x,y)+z : \ldots$ $\qquad [U^-,U^-]/$

L в $GL_{16}\times GL_{10}$

(g,h) : $\forall x \quad Q_{gx}(e) = h(Q_x(e))$

Такие (g,h) действуют на E_6/P_6 $\longrightarrow$ уравнение на L

$\mathrm{Aut}(E_6/P_6) = E_6$

E_7/P_7 $\quad E_7$ — 56-мерное

$56 = 1+27+27+1$

$[1 : x : x^{\#} : N(x)]$ $\quad [\alpha : x : y : \beta]$

(кубические йордановы алгебры)

$27 \longrightarrow 27$ $\qquad 27 \longrightarrow 1$

$x \longmapsto x^{\#}$ $\qquad x \longmapsto N(x)$

- $N(x) \neq 0$ – плотная орбита $\qquad \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix} = x$
- $N(x) = 0$, $x^{\#} \neq 0$ $\qquad \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0\end{pmatrix} = x$
- $N(x) = 0$, $x^{\#} = 0$, $x \neq 0$ $\qquad \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0\end{pmatrix} = x$
- $x = 0$ $\qquad \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 0\end{pmatrix} = x$

$\begin{pmatrix} 1 & 8 & 8 \\ 8 & 1 & 8 \\ 8 & 8 & 1\end{pmatrix}$

$E_6 \quad GL_{27}\times GL_{27}\times$

$(\alpha)\,y = x^{\#} \longrightarrow y^{\#} = \beta x$ — будет в базисе Гребнера

$(\alpha^2)\,\beta = N(x)$

$$\mathbb{P}(F_e \oplus \mathcal{J}) \rightleftarrows E_7/P_7$$

$$[\alpha : x] \longleftarrow [\alpha : x : y : \beta]$$

$$[\alpha : x] \longmapsto [\alpha^3 : \alpha^2 x : \alpha x^\# : N(x)]$$

$\{\alpha = 0, N(x) = 0\}$ $\alpha = 0, x = 0$ — не определено

$\cancel{E_6/P_{1,6}}$

$$E_6 / P_{1,6}$$

$\{\alpha = 0; N(x) = 0\}$ $\{\alpha = 0, \beta = 0, y(x) = 0\}$

сингулярн. локус