26.10.2009

Саша Цветолев

~~Конечное~~ Ограниченное порождение в $SL(n, A)$

K — поле алг. чисел, $\mathcal{O}$ — кольцо целых в K

B — порядок в $\mathcal{O}$, S — мульт. мн-во в ~~$\mathcal{O}$~~ B

$k = \deg K$ over $\mathbb{Q}$

A — комм. кольцо, $q \triangleleft A$, $n > 0$

$SL(n, A, q) = \{T \in SL(n, A) \mid T \equiv I_n \bmod q\}$

$LU(n, q) = \{E_{ij}(a) \mid a \in q,\ 1 \le i \ne j \le n\}$

$E(n, q) = \langle LU(n, q) \rangle$

$LU^*(n, A; q)$ — $E(n, A)$ — сопр. к LU

$E^* = \langle LU^* \rangle = E(n, A, q)$

$W(q)$ — q-унимодулярные элементы

$\{(a, b) \in A \times A \mid aA + bA = A,\ (a, b) \equiv (1, 0) \bmod q\}$

$U(q) = (A/q)^*$

Т. Геделя $L =$ f.o., $\tau \subset L$. Если τ не имеет модели, то ~~не~~ кон. поднабор высказываний ~~не~~ имеет модели

Следствие 2.8 $n \in \mathbb{N}$, L — язык f.o., вкл. язык колец

- $(0, 1, *, +)$
- n^2 x_{ij}
- 2 символа $X(x_{ij})$, $H(x_{ij})$ — n^2-арные ~~операции~~ отношения
- еще что-то

$\to$ Пусть $\tau \subset L$: $\forall$ модели $(A, (+, \times, \ldots))$

- A — комм. кольцо
- X_A, H_A — мн-ва $n \times n$ матриц, удовл. X и H

$H_A \le SL(n, A)$

X_A порождает подгр. кон. индекса в H_A

Тогда $\forall$. X_A огранич. порождает H_A

т.е. $\exists r = r(n, L, \tau)$: $\forall$ модели

$\langle X_A \rangle_{r^2} = \langle X_A \rangle$ и $_{r<}|H : \langle X_A \rangle| < \infty$

□

$L^+ = L \cup \{c_1, \dots, c_n, \dots\}$

$T^+ : \forall i, j, n > 0 \quad i \neq j \Rightarrow$

$c_i \in H_A \quad c_i^{-1} c_j \notin \langle X_A \rangle_{n-1}$

$|H_A : \langle X_A \rangle| < \infty$

$\to$ он противоречив

$\to \exists$ поднабор с кон. числом $c_1, \dots, c_n$,

кот. противоречив $\Rightarrow |H_A : \langle X_A \rangle| < r$

Если $\langle X_A \rangle_{n} \neq \langle X_A \rangle$

$\to$ можем выбрать $c_i \in \langle X_A \rangle_{in} \setminus \langle X_A \rangle_{in-1}$ ∎

Если A – обл. цел., удовл. $SR_{1\frac{1}{2}}$, $Gen(t, r)$, $Exp(t, l)$, $n \geq 3$

для каких-то r, l

$\to SL(n, A; q) / E^{\triangleleft}(n, A; q) \leq t^r$

и $LU(n, OS^{-1})$ огр. порождает $E(n, OS^{-1})$

$LU^{\triangleleft}(n, OS^{-1}; q)$ огр. порождает $E(n, OS^{-1}; q)$

__Опр.__ $m > 0$ A уд. __SR_m,__ если

$\forall a_0, \dots, a_r$ при $r \geq m$

$a_0 A + \dots + a_r A = A \quad \exists a_1', \dots, a_r'$ т.ч.

$a_i' \equiv a_i \mod a_0 A$

и $a_1' A + \dots + a_r' A = A$

__Опр.__ A уд. $SR_{1\frac{1}{2}}$, если $\forall q \triangleleft A \quad sr(A/q) \leq 1$

$\boxed{\text{Лемма}}$ OS^{-1} удовл. $SR_{1\frac{1}{2}}$ $\quad sr(A) \leq m$

$\boxed{\text{Т 2.14}}$ A – ком., $m > 0$, ~~A удовл. SR_m~~ $\Rightarrow \forall n > m$

$\forall q \in A$ ① $SL(n, A, q) = SL(m, A; q) E(n, A, q)$

② $E(n, A, q)$ норм. в $SL(n, A)$

③ $n \geq 3 \to [E(n, A), SL(n, A, q)] < E(n, A, q)$

$[\ ]: W(q) \longrightarrow C$-группа

символ Меннике, если:

$(a, b) \longmapsto \left[{b \atop a}\right]$

(MS1a) $\left[{b + ta \atop a}\right] = \left[{b \atop a}\right] \quad \forall t \in q$

(MS1b) $\left[{b \atop a + tb}\right] = \left[{b \atop a}\right] \quad \forall t \in A$

(MS2a) $\left[{b_1 \atop a}\right]\left[{b_2 \atop a}\right] = \left[{b_1 b_2 \atop a}\right] \quad \forall (a, b_1), (a, b_2) \in W(q)$

$C(q), [\![\ ]\!]_q$ – универсальный символ, т.е. $\forall$ символа $[\ ]$ в C
$$\gamma : C(q) \longrightarrow C$$
$$[\ ] = \gamma \circ [\![\ ]\!]$$

$N \trianglelefteq SL(n, A, q)$, $n \geq 2$

$C = SL/N$

$N \supseteq E(n, A, q)$, $[E(n,A), SL(n,A;q)]$

$\Rightarrow$ ① $\left[\begin{smallmatrix} b \\ a \end{smallmatrix}\right]_q : W(q) \longrightarrow C$
$$(a,b) \longmapsto \begin{bmatrix} a & b \\ * & * \end{bmatrix} N$$

– корр. определенный

② $[\ ]_q$ уд. (MS1a) и (MS1b)

③ $n \geq 3$ (MS2a)

Св-ва:

① $a \equiv \overset{\text{unit}}{\mathcal{U}} \bmod bA$, $b \equiv \mathcal{U} \bmod aA$ $\rightsquigarrow \left[\begin{smallmatrix} b \\ a \end{smallmatrix}\right] = 1$

$q' \trianglelefteq A$, $q' \underset{\neq 0}{<} q$ $\quad \forall (a,b) \in W(q)$
$\exists (a',b') \in W(q')$: $\left[\begin{smallmatrix} b' \\ a' \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} b \\ a \end{smallmatrix}\right]$

$\mathrm{Im}[\ ]$ – абелева подгруппа в C

q – главный $\rightsquigarrow$ есть мультипликативность по первому аргументу
$$\left[\begin{smallmatrix} b \\ a_1 \end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix} b \\ a_2 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} b \\ a_1 a_2 \end{smallmatrix}\right] \quad \text{(MS2b)}$$

$\boxed{\text{Пр.}}$ $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2, A, q) \Rightarrow \left[\begin{smallmatrix} b \\ a \end{smallmatrix}\right]^{-1} = \left[\begin{smallmatrix} c \\ a \end{smallmatrix}\right]$

$q = qA$, $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2, A, q)$

$$f\,\mathbb{I}_{2\times 2} + g\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, A, q)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} bg \\ f+ga \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} b \\ f+ga \end{bmatrix}^2$$

Т. Дирихле

$\forall a, b \in \mathcal{O} : a\mathcal{O} + b\mathcal{O} = \mathcal{O}$

$\exists$ бескон. много $h \in a + b\mathcal{O}$: (1) $h\mathcal{O}$ – max в $\mathcal{O}$ (2) $N(h) > 0$

Условия на кольцо:

few generators

A удовл. $Gen(t, r)$, если $\forall a, b : aA + bA = A$

$\exists h \in a + bA : \mathcal{U}(hA) / \mathcal{U}(hA)^t$ порождается $\leq r$ перемен.

$$\mathcal{U}(hA) = (A/hA)^*$$

Утв.: $\mathcal{O}S^{-1}$ порождается $Gen(t, 1)$ $\forall t$

$Exp(t, l)$:

пусть $t \geq 0$, $l > 0$

A – уд. $Exp(t, l)$ если $\forall q \in A \setminus \{0\}$ $\forall (a, b) \in W(qA)$

$\exists a', c, d \in A$, $u_i, f_i, b_i', d_i' \in A$ $1 \leq i \leq l$ т.ч.

(1) $a' \equiv a \mod bA$

(2) $\begin{pmatrix} a' & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, A, qA)$

(3) $1 \leq i \leq l \to \begin{pmatrix} a' & b_i' \\ c & d_i' \end{pmatrix} \in SL(2, A, qA)$

(4) $f_i + g_i \begin{pmatrix} a' & b_i' \\ c & d_i' \end{pmatrix} \in SL(2, A, qA)$ $1 \leq i < l$

(5) $(f_1 + g_1 a')^2 \ldots (f_l + g_l a') \equiv (a')^t \mod cA$

(6) u_i – обратимы, $f_i + g_i a' \equiv u_i \mod b_i' A$ $\forall i$

$\mathcal{O}S^{-1}$ удовл. $Exp(2(8k)!, 2)$