$\boxed{2.11.2009}$

Никита Семенов

Доклад Серра

n-Пфистеровы формы : k - поле, $\mathrm{char}\, k \neq 2$

$$a_1, \ldots, a_n \in k^*$$

$$q = \langle 1, -a_1\rangle \otimes \ldots \otimes \langle 1, -a_n\rangle = \langle\langle a_1, \ldots, a_n\rangle\rangle \qquad \dim(q) = 2^n$$

$$\langle a, b\rangle : \ a x_1^2 + b x_2^2$$

$\langle\langle a_1\rangle\rangle = \langle 1, -a_1\rangle = x^2 - a_1 y^2$ — 1-форма Пфистера — норма $k(\sqrt{a})$

$\langle\langle a, b\rangle\rangle\ \langle 1, -a\rangle \otimes \langle 1, -b\rangle = \langle 1, -a, -b, ab\rangle$ — норма на алгебре кватернионов

$$A = \langle x, y \mid x^2 = a,\ y^2 = b,\ xy = -yx\rangle$$

$\cancel{\langle 1, -a\rangle \otimes \langle 1, b\rangle}$

$\langle\langle a, b, c\rangle\rangle$ — норма на октонионах

Чем они важны? Связью с гипотезой Милнора:

$$K_n^M(k)/2 \xrightarrow{\ \sim\ } H^n(k, \mathbb{Z}/2)$$

$\|$ порождается $\{a_1, \ldots, a_n\} \longmapsto (a_1) \cup \ldots \cup (a_n)$

$$T k^* \Big/ \left(\begin{matrix} a \otimes (1-a) = 0 \\ \forall a \neq 0, 1 \end{matrix} \right)$$

$$(a) \in H^1(k, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = k^*/k^{*2}$$

$\uparrow$ Hilbert 90

$$H^i(k) \times H^j(k) \xrightarrow{\ \cup\ } H^{i+j}(k)$$

$K_0(k) = \mathbb{Z}$ — dim

$K_1(k) = k^*$ — det

$\vdots$

$K_n^M(\mathbb{F}_q) = 0 \ \forall n \geq 2$

$$\mathrm{Pfister}_n \longrightarrow H^n(k, \mathbb{Z}/2)$$

$$\langle\langle a_1, \ldots, a_n\rangle\rangle \longmapsto (a_1) \cup \ldots \cup (a_n)$$

(чистый) символ

{простые алг. группы над полем k типа Φ} $\xrightarrow{?}$ ~~Pfister~~ $H^n(k, \mathbb{Z}/2)$

функториально по k

Ex. ① $\Phi = G_2$

$$H^1(-, G_2) \longrightarrow H^3(-, \mathbb{Z}/2) \longleftarrow \text{расширение } k$$

норма октонионов → это биекция

② $\Phi = A_1$

$$H^1(k, PGL_2) \longrightarrow H^2(-, \mathbb{Z}/2) = {}_2\mathrm{Br}(k)$$

автоморфизмы кватернионов

$\|$

центр. простые алг. над k степени 2 $\longmapsto$ ее класс $[A]$ в группе Брауэра

(3) $\Phi = F_4$

$$\begin{tikzcd}
 & H^1(k, F_4) \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
H^3(k, \mathbb{Z}/3) & H^3(k, \mathbb{Z}/2) & H^5(k, \mathbb{Z}/2)
\end{tikzcd}$$

$H^3(k,\mathbb{Z}/3)$ — инвариант Серра-Роста

$H^3(k,\mathbb{Z}/2)$ — инвариант Роста

$\Phi = G_2, A_1, F_4, E_8$

$\Downarrow$

$H^1(-, \Phi) = \{$простые алг. группы типа $\Phi\}$

Гипотеза Серра-Роста: если знаем эти 3 инварианта, то знаем и группу.

$$H^1(k, F_4) \longrightarrow H^3(k, \mathbb{Z}/3)$$

первая конструкция Титса:

A — ц.п.а. $\deg = 3$

$c \in k^*$ $\longrightarrow$ группа типа F_4

$A \oplus A \oplus A$ $\rightarrow$ йорданово умножение, подкручение на c.

$\longrightarrow$ $[A] \cup (c) \in H^3(k, \mathbb{Z}/3)$

(4) Инвариант Роста

$$H^1(k, G) \longrightarrow H^3(k, \mu_n^{\otimes 2})$$

G — односв. п/простая группа

Серр, 1999: $E_8(\mathbb{C}) \geq PGL(2, 31)$

или $\overline{\mathbb{Q}}$

$E_8(K) \overset{?}{\geq}$

$\mathrm{char}(K) = 0$

$K = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ — неверно

$$\mathrm{Ker}\left(H^1(k, E_8) \xrightarrow{\text{инв. Роста}} H^3(k, \mathbb{Z}/4)\right) \longrightarrow H^5(k, \mathbb{Z}/2)$$

или даже Pfisters

Ψ, $k = \mathbb{Q}$

„комп." группа типа E_8 $\longmapsto$ что-то в $H^5(k, \mathbb{Z}/2)$

это $(-1) \cup (-1) \cup (-1) \cup (-1) \cup (-1)$

Ответ на вопрос Серра:

лежит $\Leftrightarrow$ $(-1)^5 = 0$ в $H^5(k, \mathbb{Z}/2)$

сумма 32 квадратов

$\Leftrightarrow$ $-1 = \sum 16$ квадратов в K

см. Кассельс–Фрёлих