А.В. Степанов

22.02.2010

Подгруппы в $Sp_{2n}(R)$, содержащие $Sp_{2n}(\mathbb{Z})$, продолжение

$\boxed{\text{Теорема}}$ $\mathbb{Z} \subseteq A$ — комм. кольцо

$$Ep_{2n}(\mathbb{Z}) \le H \le Sp_{2n}(A)$$

$$\Rightarrow \exists!\, (R, \Lambda) \text{ т.ч. } Ep_{2n}(R, \Lambda) \le H \le N_A(R)$$

форменное кольцо

$$\mathbb{Z} \subseteq \Lambda \subseteq R \quad \text{где } N_A(R) = N_{Sp_{2n}(A)}(Ep_{2n}(R))$$

$\boxed{\text{Предл. 1}}$ $\exists R \subseteq A :\ Ep_{2n}(R, 2R, (2R)^2)^H \le N_A(R)$

$$Ep_{2n}(R, 2R, (2R)^2) = \langle T_{ij}(2r) \mid r \in R,\ i \ne \pm j \rangle^{Ep_{2n}(R)}$$

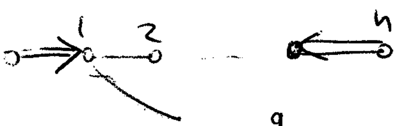
$\boxed{\text{Лемма 1}}$ (Голубчик — Михалев)

$\alpha \in \Phi_e$, s — маленький, $g \in Sp_{2n}(A)$

$$[X_\alpha^{s^g}, X_\alpha] = \{1\}$$

// $s^g = \begin{pmatrix} \ast & 0 \\ 0 & \ast \end{pmatrix}$ $\quad X_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & & \ast \\ & 1 \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

$$x_\alpha(r)^{s^g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \ast & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \in P_1^-$$



$$\rightsquigarrow X_\alpha^{s^g} \in P_1$$

T — тор, корни — характеры тора

$s \in T$ — маленький полупростой элемент, если $\alpha(s) = 1\ \forall \alpha \in \Phi_e$ и s нецентрален

// у нас $\Phi = C_n$

$$s = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \varepsilon_n & & & \\ & & & \varepsilon_n & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \varepsilon_1 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_i = \pm 1$$

маленький полупростой — сопряженный с маленьким полупростым из T.

$2 = 0 \Rightarrow$ короткий корневой, т.е. для $\beta \in \Phi_s$ сопряженный с $x_\beta(r)$ — маленький унипотентный

маленький = маленький полупростой или маленький унипотентный

~~Лемма 2~~ (R_H, Λ_H) — ассоциировано с H, если это наибольшее форм. подкольцо такое, что $Ep_{2n}(R, \Lambda) \le H$.

$\boxed{\text{Лемма 2}}$ $H \cap P \le N_A(R_H)$ // P — произвольная параболическая

// Если есть точное представление π и $g \in G(A)$ $\pi(g) \in GL_m(R_H) \rightsquigarrow g \in G(R_H)$

Лемма 3 $\quad Ep_{2n}(\mathbb{Z})^g \subseteq N_A(R)$, $\; g \in Sp_{2n}(A)$ $\Rightarrow g \in N_A(R)$

О $Ep_{2n}(R)$ – наиб. совершенная в $N_A(R)$, если R нетерово

Д-во Предл. 1

$x_\alpha(1)^{s^{agb}}$, где $\alpha \in \Phi_e$, s – маленький полупростой элемент

$g \in H$, $\; a, b \in Ep_{2n}(R, \Delta) \le H$ $\qquad$ // $R = R_H$, $\Delta = \Delta_H$

$\in H$, $\in P_1 \rightsquigarrow \in N_A(R)$

$\rightsquigarrow (g^{-1}a^{-1}s^{-1}ag)\underbrace{b\, x_\alpha(1)\, b^{-1}}(g^{-1}a^{-1}sag) \in N_A(R)$ по Лемме 2

порождают $Ep_{2n}(\mathbb{Z})$, где $b \in Ep_{2n}(R, \Delta)$

$\rightsquigarrow g^{-1}(a^{-1}sa)g \in N_A(R)$ по Лемме 3

$\trianglelefteq$ наименьший норм. делитель, содержащий s.

$\rightsquigarrow \; Ep_{2n}(R, 2R, (2R)^2)^g \subseteq N_A(R)$

Пр. 2 $\quad 2^m = 0$ в A $\rightsquigarrow$ выполнена осн. теорема

□ Тот же трюк, но s – унипотентный, а не полупростой

$2 = 0 \rightsquigarrow$ он унип. и есть то же тождество

$H \cap P_1 \cdot Sp_{2n}(A; 2A) \le N_A(R)$ компл.-подгр.

$Sp_{2n}(R, \Delta; I, \Gamma)$

U_1 – унип. радикал P_1

$g \in H \cap P_1 \cdot Sp_{2n}(A; 2A)$

$u \in U_1$

$\rightsquigarrow u^g \in Sp_{2n}(A; 2A) \cdot P_n$

$2^m = 0 \Rightarrow g \in P_1 \cdot U_1^-(2A)$

$\rightsquigarrow u^g \in U_1^{u_1(2A)}$

$$= e + \begin{pmatrix} 1+2* \\ 2* \\ \vdots \\ 2* \end{pmatrix}(2*, *, \ldots, *) \pm \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ 2* \end{pmatrix}(2*, \ldots, 2*, 1+2*)$$

$$= \begin{pmatrix} & \\ 2* & \end{pmatrix}$$

М.А. Вавилов

Четвертая теорема об изоморфизме

$A, B, C \trianglelefteq G$

$$\frac{AB \cap AC}{A(B \cap C)} \cong \frac{BA \cap BC}{B(A \cap C)} \cong \ldots$$

тожд. Якоби ~~Рома Михайлов~~

// для правонормированных

$[x, yz][y, zx][z, xy] = 1$

fake Jacobi identity

$U_n^{P_n\cdot Sp_{2n}(A;I)} \le P_n\cdot Sp_{2n}(A;I^2)$

$U_1^{P_1\cdot Sp_{2n}(A;I)} \le P_n\cdot Sp_{2n}(A;I)$

У Вити:

$Ep_{2n}(R,\Lambda)\le H\le GL_{2n}(R)$

у нас $N_A(R)$

$Ep_{2n}(R,\Lambda)^H \le GL_{2n}(R)$

$\boxed{\text{Лемма 4}}$ $g\in P_n(A)$, $Ep_{2n}(R,\Lambda)^g\le H$

$\Rightarrow g\in N_A(R)$

$\boxed{\text{Лемма 5}}$ $g\in P_n(A)$, $U_n^-(R,\Lambda)^g\le \cancel{N_A(R)}\ Sp_{2n}(R)$

$\Rightarrow g\in N_A(R)$

$$\begin{pmatrix}e&0\\f&e\end{pmatrix}^{\begin{pmatrix}a&b\\0&d\end{pmatrix}} = \left(\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline d^{-1}fa & * \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix}e&g\\0&e\end{pmatrix}^{\begin{pmatrix}a&b\\0&d\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}e&a^{-1}gd\\0&e\end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Лемма 6}}$ $2^n=0$ в A

$g\in P_n(A)\cdot Sp_{2n}(A;2A)$,

$Ep_{2n}(R,\Lambda)^g\le H$

$\Rightarrow g\in N_A(R)$

— по индукции:

$U_n^g\le P_n\cdot Sp_{2n}(A;2^kA)\cap H$

$\le N_A(R)$

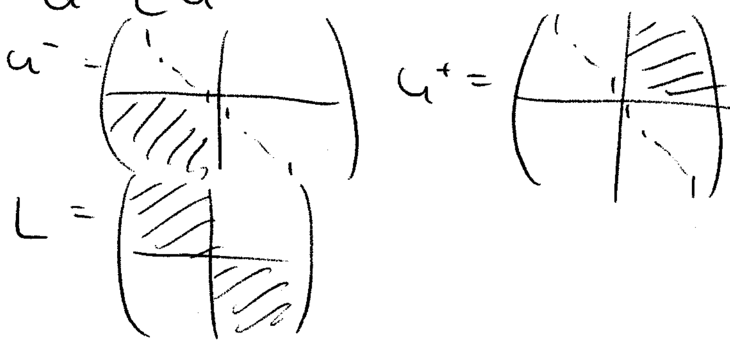
$\boxed{\text{Лемма 7}}$ $2^n=0$ в A,

$g\in P_1(A)\cdot Sp_{2n}(A;2A)$

$Ep_{2n}(R,\Lambda)^g\le H$

$\Rightarrow g\in N_A(R)$

u^-Lu^+



---

u^-Lu^+

$u^{\pm g}\in N_A(R)$

$\Rightarrow \cancel{g}(u^-)^g\in N_A(R)$