С. Синчук
2.11.2011

van der Kallen
Comm. Algebra, 1987
Vaserstein's pre-stabilization theorem over commutative rings

---

R — комм. кольцо $\quad A \trianglelefteq R$, $n \geq 2$, $sr(R) \leq n$

$GL(n,R,A) = Ker(GL(n,R) \longrightarrow GL(n,R/A))$

$\cup$

$E(n,R,A) = [U_1(R), U_1^-(A)]$

Если $n \geq 3$, то $E(n,R,A) \trianglelefteq GL(n,R)$

$[GL(n,R,A), E(n,R)] = E(n,R,A)$

Если $sr(R) \leq n$,

$E(n+k,R,A) \cap GL(n+1,R,A) \subseteq E(n+1,R,A)$ при $k \geq 1$

Вопрос: $E(n+1,R,A) \cap GL(n,R,A) = ?$

ответ: $\tilde{E}(n,R,A) = \langle E(n,R,A), [GL(n,R,A), E(n,R)],$
(при $n \geq 3$ содержится в $E(n,R,A)$)

$$\left\{ (I_n + XD)(I_n + DX)^{-1} \;\middle|\; \begin{array}{l} X \in M(n,A) \\ D = diag(\underbrace{q,1,\dots,1}_{n}),\ q \in R \\ I + XD \in GL(n,R) \end{array} \right\} \rangle$$

новый тип
элем. преобразований:

$$\begin{pmatrix} 1+qx_1, & qx_2, & \dots, & qx_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1+qx_1 & \dots & \dots \\ q\dots & \dots & \dots \\ q\dots & \dots & \dots \\ q\dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Почему $\tilde{E}(n,R,A) \subseteq E(n+1,R,A) \cap GL(n,R,A)$?

$(I+XY)^{-1} =: I + Z$

зн $\left\{ \begin{pmatrix} I+XY & 0 \\ 0 & (I+YX)^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & X+XYX \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ YZ & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ Y & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -X \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -Y & I \end{pmatrix} \right.$

$(I+YX)^{-1} = I - Y(X + ZX)$

$Y := I$
$X := Z$

$$\begin{pmatrix} I+XY & 0 \\ 0 & (I+YX)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (I+YX)^{-1} & 0 \\ 0 & I+YX \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

то, что нам нужно

$$N = \left\{ x = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \bmod A \right\}$$

$n+1$ $\quad 1 \quad n-1 \quad 1$

$\wedge$ $GL(n, R/A)$

$\pi : GL(n,R) \to GL(n, R/A)$

$N = \pi^{-1}(\ldots)$

$GL(n+1,R,A) \le N \le GL(n+1,R)$ — очевидно

<u>Опр.</u> Пусть $a, s \in GL(n,R,A)$

$$M(a,s) := \left\{ g \in N \;\middle|\; g = \begin{pmatrix} a & \overset{\in A}{*} \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ * & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \overset{A}{*} \\ 0 & s \end{pmatrix} \right\}$$

При этих условиях $g \in N$

$\boxed{\text{Лемма 1}}$ $M(a,s) \cap M(a',s') \neq \emptyset$

$\Rightarrow a'^{-1} a s s'^{-1} \in \tilde{E}(n,R,A)$

□ можно считать, что $a' = s' = 1$.

Уберем немного свободу из унипот. радикалов:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \\ * & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & b \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ z & I_n \\ q & \end{pmatrix}$$

м. считать $z = 0$ (справа просто, слева ~~а~~ меняется на элементарную матрицу)

$b \in A^{n}$ (сравним по mod A)

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} a \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & \\ * & 1 & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}}_{D}$$

$\to \bar{a} = I_n + y \cdot \mathrm{diag}(q, 1, \ldots, 1)$

$$\begin{pmatrix} I_n & b \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ 0 & I_{n-1} \\ q & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{a} & 0 \\ & 1 \end{pmatrix} t_{n+1,1}(q) \begin{pmatrix} 1 & * \\ & \underbrace{1 + PyDP^{-1}}_{s_1} \end{pmatrix}^{-1},$$

где $P = \begin{pmatrix} 0 & I_{n-1} \\ 1 & \end{pmatrix}$

$\bar{a} s_1 \in \tilde{E} \quad \rightsquigarrow a s \in E$

$\boxed{\text{Лемма 2}}$ $\quad (a, s) \sim (a', s')$

если $\quad a' \in a\hat{\tilde{E}}$

$\quad\quad\quad s' \in \hat{\tilde{E}} s$

Пусть $c \in R^{n-1}$; $a, s \in GL(n, R, A)$

$$x := \left(\left(\begin{array}{c|c} I_{n-1} & c \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) s \right)_{*n}, \quad g \in M(a, s)$$

$\Rightarrow \forall y \in \langle x_1, \ldots, x_{n-1} \rangle \; \exists (a', s') \sim (a, s):$

$$g\, t_{n+1,1}(y) \in M(a', s')$$

$\boxed{\text{Следствие}}$ $\quad a, a', s, s' \in GL(n, R, A)$

$g \in M(a, s)$, $h \in M(a', s')$, $y \in R$

$\Rightarrow \exists z \in R \; : \exists (a_1, s_1) \sim (a, s)$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad \exists (a_1', s_1') \sim (a', s')$

$g\, t_{n+1,1}(z) \in M(a_1, s_1)$

$h\, t_{n+1,1}(z - y) \in M(a_1', s_1')$

$$s = \left(\begin{array}{c|c} * & \begin{matrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{matrix} \end{array} \right) \qquad s' = \left(\begin{array}{c|c} * & \begin{matrix} s_1' \\ \vdots \\ s_n' \end{matrix} \end{array} \right)$$

$\rightsquigarrow (s_1, \ldots, s_{n-1}, s_1', \ldots, s_{n-1}', s_n' s_n) \qquad sr \leq 2n-2$

$d_i \qquad d_i'$

$c_i = d_i s_i', \quad c_i' = d_i' s_i$

$$(\underbrace{s_i + c_i s_n,}_{x} \; | \; \underbrace{, s_i' + c_i' s_n'}_{x'}) - \mathrm{Um}(2n-2)$$

$$x = \left(\left(\begin{array}{c|c} I & c \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) s \right)_{*n} \qquad \text{Пусть } z \in \langle x_1, \ldots, x_{n-1} \rangle$$

$$x' = \left(\left(\begin{array}{c|c} I & c' \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) s' \right)_{*n} \qquad \text{и } y = z + \underset{\langle x_1', \ldots, x_n' \rangle}{\underset{\cap}{(y - z)}}$$

$\boxed{\text{Следствие}}$

$g \in M(a,s)$

$h = g\, t_{n+1,1}(y) \in M(a',s')$

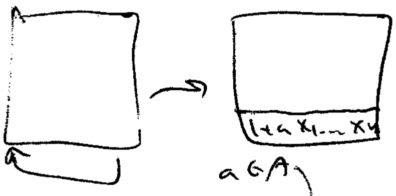
$\Rightarrow \exists\, (a_1,s_1) \sim (a,s)$

$a'^{-1} a_1 s_1 s'^{-1} \in \tilde{E}$.

$$h = g\, \underset{\substack{\uparrow \\ M(a_1,s_1)}}{t_{n+1,1}(z)} = h\, t_{n+1,1}(z-y)$$

$\boxed{\text{Лемма}}$ $\forall g \in N\ \exists y \in R:$ $\quad a(g) \in GL(n,R,A)$, $s \in \tilde{E}(n,R,A)$

$\underline{sr\, R \leq n}$ $\quad g\, t_{n+1,1}(y) \in M(a,s)$



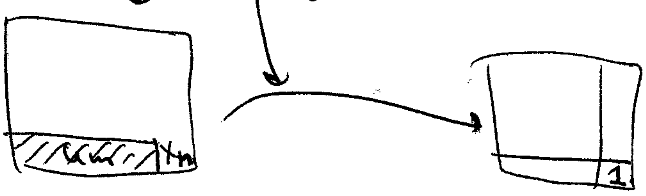
$\rightsquigarrow (1+a\ x_1 \dots x_{n-1}\ a x_n) \in Um$

$a \in A$

$\rightsquigarrow \exists\, t_0, \dots, t_{n-1}\ (1+a+t_0 a x_n, \dots x_i + t_i a x_n \dots) \in Um$

относит. прибавление

$x_n = 1 + a'$



$\rightsquigarrow$ разложение Басса–Кольстера

<u>Опр.</u> $F: N \longrightarrow GL(n,R,A)/\tilde{E}(n,R,A)$

$g \longmapsto a(g)$

По Следствию: если $g\, t_{n+1,1}(y) \in M(a,s)$
$\in M(a',s') \rightsquigarrow a\tilde{E} = a'\tilde{E}$

$\boxed{\text{Лемма}}$ $g \in N$

1) $F\left(\begin{pmatrix} 1 & A \\ & I \end{pmatrix} g\right) = F(g)$

2) $F\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ R & I \end{pmatrix} g\right) = F(g)$

1) очевидно

2) Отметим что $F(t_{n+1,1}(q) g) = F(g)$

//из Леммы 2 + Следствие 1.2.

Пусть $p \in E(n+1, R, A) \cap GL(n, R, A)$

$F(p) = F(1) = \widetilde{E}$

$\rightsquigarrow p \in \widetilde{E}$