09.11.2011

Н.А.В.

Вычисления в исключительных группах при помощи весовых диаграмм

Весовые диаграммы = матричные вычисления

M. Stein, Stability...

0-й взгляд ≈ 1952

Москва: Дынкин, Винберг

$\Phi \subseteq \mathbb{R}^l$ – система корней

$\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ – фунд. система

$u, v \in \mathbb{R}^l$, $u \leq v \iff v - u = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \alpha_i$, $\lambda_i \geq 0$

L – комплексная алгебра Ли типа Φ

V – конечномерное представление L

$\pi : L \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$

H – картановская подалгебра в L

$\lambda \in H^* = \mathrm{Hom}(H, \mathbb{C})$

$V^\lambda = \{v \in V \mid \pi(h)v = \lambda(h)v\}$

$V = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} V^\lambda$

λ – <u>вес</u> представления π, если $V^\lambda \neq 0$

$\Lambda(\pi)$

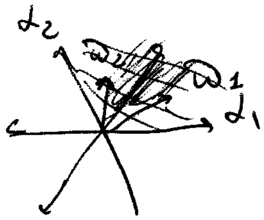
$(\Lambda(\pi), \leq)$

$P(\Phi)_+$

$P(\Phi)_{++}$

$\omega_1, \dots, \omega_l$

порождают подконус в конусе, порожденном полож. корнями



1-й взгляд

Ивахори, Кэртис, Киннойер ≈ 1966

$W = W(\Phi)$

Их интересовали $W_I \backslash W / W_J$

$W = \langle s_1, \dots, s_l \rangle$

$J \subseteq \{1, \dots, l\}$

$W_J = \langle s_j, j \in J \rangle$ — параболическая подгруппа в группе Вейля

coset adjacency diagram

$\parallel$

диаграмма Шрайера смежных классов по отношению к системе образующих $S = \{s_1, \dots, s_l\}$

2-й взгляд

Действие исключительных групп <u>с точностью до знака</u>

(Stein 1976, Matsumoto 1969)

минимальное представление — неприводимое в хар-ке 0.

— либо микровесовое

— либо представление на коротких корнях

В $\Lambda(\pi)$ есть единственный наибольший эл-т (отн-но ~~+~~)

ϖ = старший вес представления π

π — микровесовое $\Leftrightarrow$ все веса лежат в орбите старшего: $\Lambda(\pi) = W\varpi$

$\Leftrightarrow$ все веса однократны: $\dim V^\lambda = 1$

$\Lambda(\pi) = \Phi_s \cup \{0\}$, и кратность 0 $\dim(V^0) = |\Phi_s \cap \Pi|$

— все веса однократны кроме, быть может, нулевого

— они все фундаментальны кроме ~~...~~ ad для A_l

векторные полувекторные

A_l: $\varpi_1, \dots, \varpi_l$, $\varpi_1 + \varpi_l$ — присоединенное

B_l: $\varpi_1 = e_1$ — предст. на коротких корнях = векторное $2l+1$

$\varpi_l = \frac{1}{2}(e_1 + \dots + e_l)$ — spin 2^l

C_l: $\varpi_1 = e_1$ = микровесовое = векторное $2l$

$\varpi_2 = e_1 + e_2$ = short-root $2l^2 - l - 1$

D_ℓ $\quad \omega_1 = e_1$ – векторное $\quad 2\ell$

$\omega_2 = e_1 + e_2$ – присоединенное $\quad 2\ell^2 - \ell$

$\omega_{\ell-1} = \frac{1}{2}(e_1 + \dots + e_{\ell-1} - e_\ell)$
$\omega_\ell = \frac{1}{2}(e_1 + \dots + e_{\ell-1} + e_\ell)$ $\Big\rangle$ $\dim = 2^{\ell-1}$ – half spin $+$ и $-$

количество их равно $\left| P(\Phi) / Q(\Phi) \right|$ – порядок абс. центра

E_6 $\quad \begin{matrix}\omega_1 \\ \omega_6\end{matrix} > 27$ $\qquad$ Plotkin, Semenov, Vavilov

$\omega_2 - 78$ $\qquad$ Visual basic representations: an atlas

E_7 $\quad \omega_7 - 56$ $\qquad$ IJAC, 1996, vol. 8, № 1

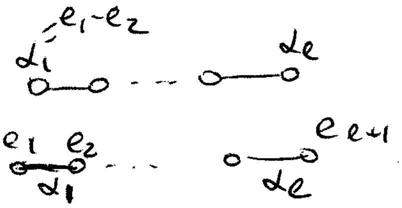
$\omega_1 - 133$

E_8 $\quad \omega_8 - 248$

F_4 $\quad \omega_4 - 26$

G_2 $\quad \omega_1 - 7$

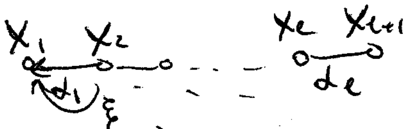
$\boxed{A_\ell}$



(A_ℓ, ω_1)

$x_\alpha(\xi)$ $\qquad X_{\alpha_1}(\xi) = t_{12}(\xi)$

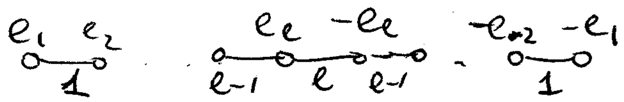
$$v = \sum_{i=1}^{\ell+1} x_i e_i$$

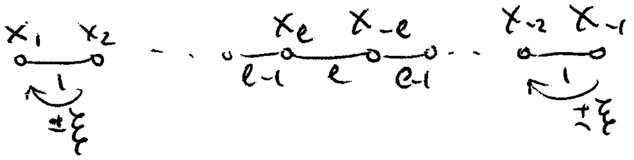


$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_\ell \end{pmatrix}$

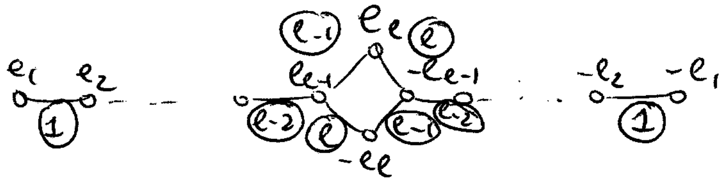
$x_{\alpha_1}(\xi)$

(C_ℓ, ω_1)





(D_l, ϖ_1)



3-й взгляд

Vavilov: A third look at weight diagrams

Rendiconti, 2000

E_6, E_7

Вав. Как увидеть знаки структурных констант?

AA, 2007, 19, №4

— Нумерология квадратных уравнений

AA, 2008, 20, №5

Лузгарев —//— гексагональных —//—

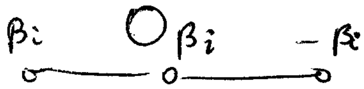
- кратности
  - кристаллические графы

    Кашивара – Люстиг – Литтельманн

A_2, Для представления на коротких корнях

$O_{\beta_1}, \dots, O_{\beta_s}$

~~кор~~ короткие простые корни



Robert Marsh:

эти диаграммы = кристалл. графы

$\boxed{\text{Теорема}}$ Базис в $V = V(\varpi)$ можно выбрать так,

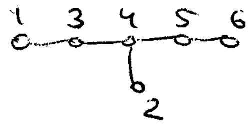
микровесовое представление

$v^\lambda, \lambda \in \Lambda(\varpi)$

чтобы

$$x_{\pm\alpha_i}(\xi) v^\lambda = v^\lambda + \xi v^{\lambda \mp \alpha_i}$$

для всех $\alpha_i \in \Pi$



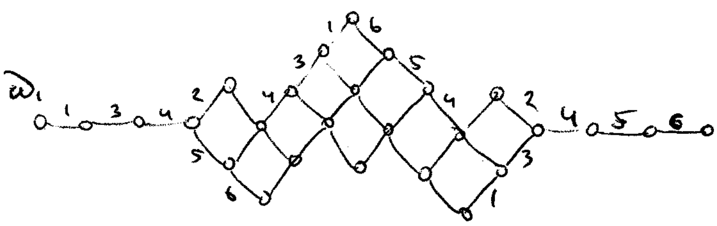
(E_6, ϖ_1)

$\dim V(\varpi_1) = 27$

$W(E_6)/W(D_5)$

$E_{sc}(E_6, R)$

$x_{\alpha_i}(\xi)$



положительный базис Шевалле

J. Tits Publ. IHES, 1966

$$x_{\alpha_1+\alpha_3}(\xi) = [x_{\alpha_1}(\xi), x_{\alpha_3}(1)]$$

В этих картинках есть

- корни
- группа Вейля
- действие $x_\alpha(\xi)$
- —//— $h_\alpha(\varepsilon)$, $w_\alpha(\varepsilon) = x_\alpha(\varepsilon)\, x_{-\alpha}(-\varepsilon^{-1})\, x_\alpha(\varepsilon)$

$$h_\alpha(\varepsilon) = w_\alpha(\varepsilon)\, w_\alpha(-1)$$

- распадение при ограничениях на подсистемы (branching)
- уравнения (на первый столбец)

$\parallel$

SMT – standard monomial theory (Seshadri Lakshmibai)

Plotkin, J. algebra, 1997