29.02.2012

Группы Судзуки и Ри по Уилсону

А. Смоленский

A_ℓ

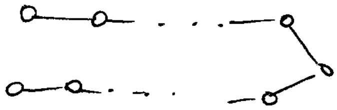
⇝ графовый автоморфизм

$r \longmapsto \bar{r}$

$\gamma_r = \pm 1$ $\quad\quad \gamma_r = 1 \quad r \in \Pi \cup -\Pi$

$x_r(t) \longmapsto x_{\bar{r}}(\gamma_r \bar{t})$ продолжается до автоморфизма всей группы

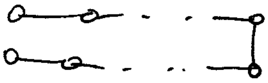
неподв. элементы = скрученные группы



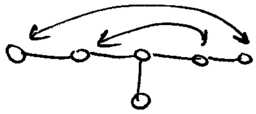
${}^2A_{2n+1}$

$SL_{\ell+1}$ $\quad x \longmapsto J x^{-t} J^{-1}$

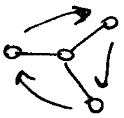
$J = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & ⋰ & \\ 1 & & \end{pmatrix}$



${}^2A_{2n}$



${}^2E_6$



${}^3D_4$

B_2

$\mathrm{char}\, F = 2 = p$

$F = \mathbb{F}_{2^{2n+1}}$

$x_r(t) \longmapsto x_{\bar{r}}(t^\tau)$

$\tau^2 = \mathrm{Frob} = {}^\wedge 2$

→ ${}^2B_2$ — группа Судзуки

${}^2G_2$ — малая группа Ри — char = 3

${}^2F_4$ — большая группа Ри — char = 2

кольца

$\mathcal{G} = \mathbb{Z}[i]$

$\mathcal{E} = \mathbb{Z}[\omega]$

$\mathcal{H} = \mathbb{Z}[i, \omega] \quad \omega = \frac{1}{2}(-1+i+j+k)$

$\mathcal{U}$ — множество обратимых элементов

$\mathcal{U}(\mathcal{G}) = \{\pm 1, \pm i\}$ — кор. корни B_2

$\mathcal{U}(\mathcal{E}) = \{\pm 1, \pm \omega, \pm \bar{\omega}\}$ — кор. корни G_2

$\mathcal{U}(\mathcal{H}) = \{\pm 1; \pm i; \pm j; \pm k; \frac{1}{2}(\pm 1 \pm i \pm j \pm k)\}$ — кор. корни F_4

L = мн-во необр. эл-тов наименьшей нормы
соответствует длинным корням B_2, G_2, F_4

$L = (1+i)\mathcal{U}$ для $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$

$L = \theta\mathcal{U}$ для $\mathcal{E}$, $\theta = \omega - \overline{\omega}$

$\phi : \mathcal{U} \longrightarrow L \quad \Phi^2 = p$

$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

$(\mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H})$

$\Phi : z \longmapsto (1+i)\overline{z}$ для $\mathcal{G}$

$z \longmapsto (1-\overline{\omega})\overline{z}$ для $\mathcal{E}$

$z \longmapsto (1+i)\overline{z}j$ для $\mathcal{H}$

~~Все~~ короткие корни делятся на три типа
в зависимости от $(r, \Phi(r)) = -p/2$ — внутренние корни
$= 0$ — средние корни
$= p/2$ — внешние корни

$\mathcal{G}$: ± 1 - внешние
$\pm i$ - внутренние

$\mathcal{E}$: ± 1 - внешние
$\pm \omega$ - внутренние
$\pm \overline{\omega}$ - средние

$\mathcal{H}$ — по 8 штук

Заведем порядок на корнях, согласованный с ϕ

$(r, v_0) > 0 \rightsquigarrow r$ - положительный
$< 0 \rightsquigarrow r$ - отрицательный

$B_2 : v_0 = 2+i \qquad -1, -i, i, 1$

$G_2 : v_0 = 4-\overline{\omega} \qquad -1, \overline{\omega}, \omega, -\omega, -\overline{\omega}, 1$

$F_4 : v_0 = 8+3i+2j+k$,

Z — множество нулей
$\{0\}$ для $\mathcal{G}$
$\{0, -0\}$ для $\mathcal{E}$
$\{0, \omega 0, \overline{\omega} 0\}$ для $\mathcal{H}$

$I = U \cup Z \qquad F$ - поле, $\operatorname{char} F = p$

$W = \langle e_t, t\in I \mid \sum_{t\in \mathbb{Z}} e_t = 0 \rangle$

$\dim W = 4, 7, 26$

W_4, W_7, W_{26}

Обозначение $e(r) = e_r$

$E(r, s, \ldots) = \langle e_r, e_s, \ldots \rangle$

Внутреннее произведение (точка)

$B \overset{\text{симм.}}{:} W \times W \longrightarrow F$

$B(e_t, e_{-t}) = 1, \quad t \in \mathcal{U}$

$B(e_0, e_0) = 1 \quad (W_7)$

$B(e_t, e_{\omega t}) = 1 \quad t \in \mathbb{Z} \quad (W_{26})$

иначе $= 0$

$B(u, v) = u \cdot v$

Внешнее произведение (крестик)

$M : W \times W \longrightarrow W$ — знакопеременное

$E(r) \times E(s) = E(r+s) \qquad r, s, r+s \in \mathcal{U}$

$E(r) \times E(s) = 0, \qquad r, s \in \mathcal{U}, r+s \notin \mathcal{U}$

для W_4, $M \equiv 0$

$W_7 \quad 1 + \omega + \bar{\omega} = 0$

$e_1 \times e_\omega = e_{-\bar{\omega}}$ и домножение на ω

$e_{-1} \times e_{-\omega} = e_{\bar{\omega}}$ или на $\bar{\omega}$

$e_{-1} \times e_1 = e_0$ всех индексов

$e_1 \times e_0 = e_1$

$W_{26} \quad e_r \times e_s = e_{-t} \qquad r, s, t \in \mathcal{U}$

$r + s + t = 0$

$Q_8, \omega Q_8, \bar{\omega} Q_8$

$Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$

$r + (-r) = 0 \qquad e_0 + e_{\omega 0}$

$(-r) + r = -0$

$e_0 \times e_{\omega 0} = 0$

$e_r \times e_{-r} = e_0, e_{\omega 0}, e_{\bar{\omega} 0}$

$e_0 \times e_r = e_r, \; r \in \omega Q_8 \cup \bar{\omega} Q_8$

$e_{\omega 0} \times e_r = e_r \quad r \in Q_8 \cup \bar{\omega} Q_8$

$e_{\bar{\omega} 0} \times e_r = e_r \quad r \in Q_8 \cup \omega Q_8$

Опр. $T(u,v,w) = (u \times v) \cdot w$

T циклически симметрична на e_t

$T(e_r, e_s, e_t) \neq 0 \iff r+s+t=0$

W_7 $r,s,t \neq 0 \Rightarrow T(e_r, e_{\omega r}, e_{\bar\omega r}) = 1$

один из них 0: $T(e_r, e_{-r}, e_0) = 1$ $r = 1, \omega, \bar\omega$

Среднее произведение (звездочка)

$r, s \in \mathcal{U}$ $r+s \in L_1$

$t = \phi^{-1}(r+s) = \Phi(r+s)/p$

$e_r * e_s = e_t$

$e_r * e_{-r} + e_s * e_{-s} = e_{t+(-t)}$

На остальных — 0

$u * v = -v * u$

$u * (v+w) = u * v + u * w$

$u * (\lambda v) = \lambda^\sigma (u * v)$

$\sigma = \tau^{-1}$

Нетривиальные значения:

W_4: $e_1 * e_i = e_1$

$e_1 * e_{-i} = e_i$ и у всех индексов поменять знак

W_7: $e_1 * e_{-\bar\omega} = e_1$

$e_\omega * e_{-1} = e_\omega$

$e_{\bar\omega} * e_{-\omega} = e_\omega$

$e_1 * e_{-1} + e_{-\omega} * e_\omega = e_0$

$e_{\bar\omega} * e_{-\bar\omega} + e_{-1} * e_1 = e_0$

Опр. $\mathbb{W}$ — в. п. W вместе с $B, M, *$

Автоморфизм $\mathbb{W}$ — лин. g:

① $g(u) \cdot g(v) = u \cdot v$ $\forall u, v \in W$

② $g(u \times v) = g(u) \times g(v)$ $\forall u, v \in W$

③ $g(u * v) = g(u) * g(v)$ $\forall u, v: u \cdot v = u \cdot u = v \cdot v = 0$, $u \times v = 0$

$\mathrm{Aut}(W_4) =$ судзуки

$(W_7) =$ малая гр. Ри

$(W_{2[illegible]}) =$ больш. гр. Ри

$r \in \mathcal{U}$ $\quad r\bar{r} = 1$ $\quad r \longmapsto -r\bar{z}r$

часть группы Вейля коммутирует с Φ

$B_2 : W = D_8 \quad {}^{\sigma}W = C_2$

$G_2 : W = D_{12} \quad {}^{\sigma}W = C_2$ $\quad t \longmapsto -t$

${}^{\sigma}W \curvearrowright W \quad e_t \longmapsto e_{-t}$

действует транзитивно на баз. элементах, соот. корням одного типа

$F_4 :$ $\rho_1 : z \longmapsto z^i$

$\rho_2 : z \longmapsto (1+i)z^k(1+j)/2$

${}^{\sigma}W = D_{16}$

$\rho_1 : e_t \longmapsto e_t, \; t \in \mathbb{Z}$

$\rho_2 : e_0 \longleftrightarrow e_{\bar{\omega}0}.$

$d : e_t \longmapsto \lambda_t e_t$

$\lambda_t \lambda_{-t} = 1 \qquad \lambda_{-t} = \lambda_t^{-1}$

d сохраняет T: $\quad T(e_r, e_{-r}, e_{r+(-u)}) \neq 0$

$\lambda_t = 1 \quad \forall t \in \mathbb{Z}$

$T(e_r, e_s, e_t) \neq 0 \quad r, s, t \in \mathcal{U}$

$r + s + t = 0$

$\to \lambda_r \lambda_s \lambda_t = 1$

сохр. $*$: $\quad (\lambda_r \lambda_s)^{\sigma} = \lambda_{\phi^{-1}(r+s)}$

$W_4 : \lambda_1 = \lambda_i^{\tau+1}$

$W_7 : \lambda_\omega = \lambda_1^{-2+\tau}$

$\lambda_{\bar{\omega}} = \lambda_1^{1-t}$

$\lambda_{\bar{\omega}} \lambda_{-\omega} = \lambda_\omega^{\tau}$

$f : e_{-1} \longmapsto e_{-1}$

$e_i \longmapsto e_i + \alpha e_{-1} + \beta e_i$

$\alpha = 1$

$\beta = 0$

$\{e_{-1}, e_{-i}, e_i, e_1\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$