07.03.2012

А. Лавренов

$$1 \longrightarrow C \longrightarrow E \xrightarrow{\ \varepsilon\ } G \longrightarrow 1$$

$C \subseteq \mathrm{Cent}(E)$

⇝ (E, ε) — центральное расширение G

$E \twoheadrightarrow G$ — центр. расш.

В категории ~~...~~ центр. расширений G всегда есть конечный объект:
$$\begin{array}{c} G \\ \downarrow \\ G \end{array}$$

Нас интересует начальный объект:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U} \arrow[r, dashed, "\exists!"] \arrow[d, "\pi"'] & E \arrow[dl, "\varepsilon"] \\ G & \end{tikzcd}$$

| они $\exists$ в точности для совершенных групп

Это универсальное центральное расширение

Иногда $\begin{array}{c} G \\ \downarrow \mathrm{id} \\ G \end{array}$ — универсальное. Тогда G наз. центрально замкнутой

$\boxed{\text{Лемма}}$ $(\mathcal{U}, \pi)$ — ~~унив. центр. расш.~~ ц. расширение G оно универсально $\Longleftrightarrow$

$\mathcal{U}$ совершенна и центрально замкнута

$\Longleftrightarrow$ $\mathcal{U}$ совершенна и $\forall$ ц. расширение $\mathcal{U}$ расщепляется

т.е. для любого $E \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{U}$ $\exists \sigma: \varepsilon\sigma = \mathrm{id}_{\mathcal{U}}$

В частности

$\mathcal{U}$ — центрально замкнута

$\Longleftrightarrow$ $\mathcal{U}$ совершенна и $\forall$ ц. р. $\mathcal{U}$ расщепляется

K — поле

$$E(n, K) = \langle t_{ij}(\alpha) \rangle, \quad t_{ij}(\alpha) = e + \alpha e_{ij}$$

① $t_{ij}(\alpha)\, t_{ij}(\beta) = t_{ij}(\alpha + \beta)$

② $[t_{ij}(\alpha), t_{hk}(\beta)] = 1$, если $\mathrm{Card}(\{i, j, h, k\}) = 4$

③ $[t_{ij}(\alpha), t_{jk}(\beta)] = t_{ik}(\alpha\beta)$, если $\mathrm{Card}(\{i, j, k\}) = 3$

⇝ $E(n, k)$ совершенна ⇝ $\exists$ унив. ц. расширение

$$\mathrm{St}(n, K) = \langle x_{ij}(\alpha) \mid (1) - (3) \rangle$$

$n \geqslant 3$ — совершенна

$n \geqslant 4$ — центр. расширение $E(n, R)$ для R-комм. (Tulenbaev, van der Kallen)

$n \geqslant 5$ — центр. замкнута (Стейнберг)

Для групп Шевалле аналог доказан Стайном.

Теперь пусть R – асс. кольцо с 1

$\bar{\cdot}$ – псевдоинволюция:

$\bar{\cdot}: R \longrightarrow R$ – аддитивна, $\overline{(\bar{\cdot})} = id$, $\forall a, b \in R$ $\overline{ab} = \bar{b}\,\bar{1}^{-1}\bar{a}$

(да, $\bar{1}$ обратима)

~~$B: R\times R \longrightarrow R$~~ V – R-модуль (правый)

$B: V \times V \longrightarrow R$ – биаддитивна и

① $B(ua, vb) = \bar{a}\,\bar{1}^{-1} B(u,v)\, b$ – полуторалинейные формы,

② $B(u,v) = -\overline{B(v,u)}$ – антиэрмитова

V_0 – правый R-модуль

B_0 – антиэрмитова на нем

$\mathfrak{H}$ – группа Гейзенберга

$\mathfrak{H} = V_0 \times R$ с операцией $\dot{+}$ – группа

$(u,a) \dot{+} (v,b) = (u+v,\ a+b - B_0(u,v))$

$\dot{-}(u,a) = (-u, -a - B_0(u,u))$

Введем на ней действие элементов из R:

$(u,a) \leftharpoondown b := (ub,\ \bar{b}\,\bar{1}^{-1} a b)$

$\mathcal{L}_{min} = \{(0, a+\bar{a}) \mid a \in R\}$

$\mathcal{L}_{max} = \{\xi \in \mathfrak{H} \mid \xi = (u, a),\ a - \bar{a} + B_0(u,u) = 0\}$

– подгруппы, замкнутые отн-но действия R, и $\mathcal{L}_{min} \leq \mathcal{L}_{max}$

$\mathcal{L}_{min} \leq \mathcal{L} \leq \mathcal{L}_{max}$

устойчива отн-но действия $\iff \mathcal{L}$ – нечетный форменный параметр

Фиксируем $\mathcal{L}$. Введем нечетную $\mathcal{L}$-квадратичную форму на V

$q = (B, Q)$, где

B – антиэрмитова форма на V

$Q: V \longrightarrow \mathfrak{H}/\mathcal{L}$ – это уже R-модуль, поскольку $[\mathfrak{H}, \mathfrak{H}] \leq \mathcal{L}_{min}$

такие, что

① $Q(ua) = Q(u) \leftharpoondown a$

② $Q(u+v) = Q(u) \dot{+} Q(v) \dot{+} (0, B(u,v))$

~~③ $B(u,u) = Q(u) \dot{-} Q(u) + B_0(u,u)$~~

$tr(u,a) := a - \bar{a} + B_0(u,u)$

③ $B(u,u) = tr(Q(u))$

(V, q) — нечетное унитарное квадр. пространство

f — <u>изометрия</u>, если f сохраняет B и q.

Нечетная унитарная группа = группа изометрий нечетного унитарного пространства

ℓ — индекс Витта

$StU(V, q, \mathcal{L})$ задана образующими $\{X_{ij}(a)\}, X_k(u,a)\}$ и соотношениями

$k, i, j = 1, \dots, \ell, -\ell, \dots, -1$

$i \neq \pm j$

$b \in R$,

$(u,a) \in \mathcal{L}$,

$\ell = ind(V, q)$

$\varepsilon_i = \begin{cases} \bar{1}^{-1}, & i > 0 \\ -1, & i < 0 \end{cases}$

$\boxed{R0}$ $X_{ij}(a) = X_{-j,-i}(\varepsilon_{-j} \bar{a} \varepsilon_i)$

$\boxed{R1}$ $X_{ij}(a) X_{ij}(b) = X_{ij}(a + b)$

$\boxed{R2}$ $X_i(\xi) X_j(\zeta) = X_i(\xi \dotplus \zeta)$

$\boxed{R3}$ $[X_{ij}(a), X_{hk}(b)] = 1$, $h \notin \{j, -i\}$, $k \notin \{i, -j\}$

$\boxed{R4}$ $[X_i(\xi), X_{jk}(c)] = 1$, $j \neq -i$, $k \neq i$

$\boxed{R5}$ $[X_{ij}(a), X_{jk}(b)] = X_{ij}(ab)$

$\boxed{R6}$ $[X_i(u,a), X_j(v,b)] = X_{i,-j}(\varepsilon_i B_0(u,v))$

* $\boxed{R7}$ $[X_i(u,a), X_j(v,b)] = X_i(0, B_0(v,u) - B_0(u,v))$ — следует из R2

$\boxed{R8}$ $[X_i(u,a), X_{-i,j}(b)] = X_{ij}(-\varepsilon_i a b) X_{-j}((u, -\bar{a}) \leftarrow b)$

$\boxed{R9}$ $[X_{ij}(a), X_{j,-i}(b)] = X_i(0, \varepsilon_{-i} \bar{1} a b - \bar{b} \bar{1}^{-1} \bar{a} \varepsilon_i)$