$\boxed{14.03.2012}$

Андрей Лавренов (продолжение)

(V, q)

n – индекс Витта

V_0 – орт. дополнение к n гиперб. плоскостям – „анизотропное ядро"

$$(\cdot\,,\cdot)_q\Big|_{V_0} = B_0$$

$$(V, q) \rightsquigarrow (n, \mathcal{L})$$

Предполагаем, что $n \geq 5$. Тогда

$StU(2n, R, \mathcal{L})$ центрально замкнута

Лемма (Steinberg's central trick)

$$\begin{array}{c} E \\ \varepsilon \downarrow \\ G \end{array}$$

(E, ε) – центральное расширение G

$\Rightarrow \forall x_1, x_2 \in \varepsilon^{-1}(a)$ $\quad a, b \in G$

$\forall y_1, y_2 \in \varepsilon^{-1}(b)$

$$[x_1, y_1] = [x_2, y_2]$$

$E \xrightarrow{\pi} StU(2n, R, \mathcal{L})$ – центральное расширение

Совершенность $StU(2n, R, \mathcal{L})$ более-менее очевидна (при $n \geq 3$)

Теорема $\exists \sigma : StU(2n, R, \mathcal{L}) \longrightarrow E : \pi \circ \sigma = id_{StU}$

План: найти в $\pi^{-1}(X)$ элемент S для каждой образующей X группы Стейнберга так, чтобы для этих S выполнялись те же соотношения.

Например, $[S_{ij}(a), S_{jk}(b)] = S_{ik}(ab)$

т.к. не зависит от выбора представителя, то поставим

$$[\pi^{-1} X_{ij}(a), \pi^{-1} X_{jk}(b)] = S_{ik}(ab)$$

Определим так S_{ik} и покажем, что это определение корректно, т.е. не зависит от a, b и j.

Лемма $\#\{i,j,h,k\} = 4$. $\forall a, b \in R$ нет! правильно так: $i \neq \pm j,\ h \neq \pm k$, $h \neq j, -i,\ k \neq i, -j$

$$[\pi^{-1} X_{ij}(a), \pi^{-1} X_{hk}(b)] = 1$$

Док-во $\exists t \notin \{i,j,h,k\}$ (поскольку $n \geq 5$)

Возьмем $y \in \pi^{-1}(X_{ht}(1))$

$z \in \pi^{-1}(X_{tk}(b))$

$\rightsquigarrow X_{hk}(b) = [X_{ht}(1), X_{tk}(b)]$

Тогда

$1 = [x, y^{-1}y] = [x, y^{-1}] \cdot [x, y]$ центральные

$\rightsquigarrow [x, y^{-1}]$ – центральный

$\rightsquigarrow [x, [y, z]] = [x, y][x, z][x, y^{-1}] \ldots = 1$

Для $n = 4$:

StU – совершенна $\Rightarrow \exists$ унив. накрывающая

$$U \twoheadrightarrow StU$$

Рассмотрим $\bar{U} = U / \langle [x^a_{ij}, x^b_{hk}] \rangle \xrightarrow{\tilde{\pi}} StU$, сечение σ : $\tilde{\pi}\sigma = id$

Кроме того, $\sigma\tilde{\pi} = id$

Лемма P – совершенна, $P \xrightarrow{\pi} G$ – ц.р.

$\Rightarrow \forall E \xrightarrow{\varepsilon} G$ – ц.р. $\exists$ не более одного $P \to E$

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & E \\ & \pi \searrow \quad \swarrow \varepsilon & \\ & G & \end{array}$$

Лемма $\#\{i,j,h,k\} = 4$ $\quad {}^{i\neq \pm j}_{h\neq \pm k}$

$$[\pi^{-1}X_{hi}(a), \pi^{-1}X_{ik}(b)] = [\pi^{-1}X_{hj}(1), \pi^{-1}X_{jk}(ab)]$$

Док-во

$x \in \pi^{-1}X_{hj}(1)$

$y^{-1} \in \pi^{-1}X_{ji}(a)$

$z \in \pi^{-1}X_{ik}(b)$

$[[x,y],z]$

x, z коммутируют $\rightsquigarrow$ тождество Холла–Витта

$${}^{y}[x,[y^{-1},z]] \cdot {}^{z}[y,[z^{-1},x]] \cdot {}^{x}[z,[x^{-1},y]] = 1 \qquad \square$$

Д-во: f, g:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[dr, "\pi"'] & E \arrow[d, "\varepsilon"] \\ & G \end{tikzcd}$$

$\forall a \in P$ $a = [x_1,y_1]\ldots[x_k,y_k]$

Пусть $a = [x,y]$

$\rightsquigarrow f(a) = [f(x), f(y)]$

$g(a) = [g(x), g(y)]$ $\square$

Теперь

$$\begin{tikzcd} \bar{U} \arrow[r, shift left, "id"] \arrow[r, shift right, "\sigma\pi"'] \arrow[dr] & \bar{U} \arrow[d] \\ & St_n \end{tikzcd}$$

поэтому мультипликатор Шура порожден эл-тами вида $[x_{ij}^a, x_{hk}^b]$.

теперь можно определить $S_{ik}(a) = [\pi^{-1}X_{ij}(a), \pi^{-1}X_{jk}(1)]$

и R5 выполняется автоматически. R3, легко видеть, тоже

R1:

Лемма $S_{ij}(a) S_{ij}(b) = S_{ij}(a+b)$

Док-во Пусть $k \neq \pm i, \pm j$,

$x = S_{ik}(1)$, $y = S_{kj}(a)$, $z = S_{kj}(b)$

C4: $[x,y][x,z] = [x,yz][y,\underset{\pi^{-1}x_{ij}}{[z,x]}]$ $\square$

R0:

Лемма $[S_{ik}(1), S_{kj}(a)] = [\pi^{-1}X_{-k,-i}(\varepsilon_{-k} T \varepsilon_i), \pi^{-1}X_{-j,-k}(\varepsilon_{-j}\bar{a}\varepsilon_k)] = (S_{-j,-i}(\underset{-\varepsilon_{-j}\bar{a}\varepsilon_i}{\ldots}))^{-1}$

R6: левая часть не зависит от поднятия X_i

Лемма $[\pi^{-1}X_i(u,a), \pi^{-1}X_j(v,b)] = S_{i,-j}(\varepsilon_i B(u,v))$

Док-во $x \in \pi^{-1}X_i(u,a)$, $y \in \pi^{-1}X_{-k}(-v,b)$, $z \in \pi^{-1}X_{k,-j}(1)$

$k \neq \pm i, \pm j$

$(v,b) \angle (-1) = (-v,b) \rightsquigarrow$ все ок.

$[x^{-1},y] = [\pi^{-1}X_i(-u,-a+B(u,u)), \pi^{-1}X_{-k}(-v,b)] \in \pi^{-1}X_{ik}(\varepsilon_i B(u,v))$

$[z^{-1},x] = 1$ - здесь нужна еще лемма:

Лемма $[\pi^{-1}X_i(\xi), \pi^{-1}X_{jk}(a)] = 1$, $j\neq i$, $k \neq i$, $j \neq \pm k$

Док-во Возьмем $t \notin \{\pm i, \pm j, \pm k\}$

$$[\pi^{-1} X_i(\xi), [\pi^{-1} X_{jt}(1), a^{-1} X_{tk}(a)]] =$$

x, y, z

$$= [x,y][x,z][x,y^{-1}][x,z^{-1}] = 1$$

и снова $1 = [x, y^{-1}y] = [x,y^{-1}][x,y]$ и то же для z вместо y □

Теперь $[z^{-1}, x] = 1$

$$\rightsquigarrow S_{i,-j}(\varepsilon_i B(u,v)) = [[x^{-1}, y], z]$$

Холл-Витт

$${}^{y}[x,[y^{-1},z]] \cdot {}^{z}[y,[\cancel{z^{-1}},x]] \cdot {}^{x}[z,[x^{-1},y]] = 1$$

$${}^{x^{-1}y}[x,[y^{-1},z]]$$

$$[y^{-1},z] \in \pi^{-1}(X_{-k,-j}(\varepsilon_{-k}(\bar{b}-B(v,v))) \cdot X_j((v, b-B(v,v)) \leftarrow 1))$$

поскольку $y^{-1} \in \pi^{-1} X_{-k}(v, \underbrace{-b+B(v,v)}_{=-\bar{b}}) \xrightarrow{R8}$ $b - B(v,v) = b$

$\mathcal{L} \leqslant \mathcal{L}_{max} \rightsquigarrow \forall \xi \in \mathcal{L}\ tr(\xi) = 0$:

$$b - \bar{b} - B(v,v) = 0$$

Теперь $[x,[y^{-1},z]] = [\pi^{-1} X_i(u,a), \pi^{-1} X_j(v,b)]$

$\pi^{-1} X_{i,j}(\ldots)$ — коммутирует и с y, и с x. □

$\boxed{\text{Лемма}}$ $k \neq \pm i, \pm j$; $i \neq \pm j$

$$S_{i,-k}(-\varepsilon_i \bar{B}(\bar{1})^{-1} \bar{a} b) \cdot [\pi^{-1} X_i((u,-\bar{a}) \leftarrow b), \pi^{-1} X_{-i,-k}(1)] =$$
$$= S_{j,-k}(-\varepsilon_j \bar{a} b)\, [\pi^{-1} X_j(u,-\bar{a}), \pi^{-1} X_{j,-k}(b)]$$

// После этого можно положить $S_k(u,a) = S_{j,-k}(-\varepsilon_j \bar{a}) \cdot [\pi^{-1} X_j(u,-\bar{a}), \pi^{-1} X_{j,-k}(1)]$
// и отсюда сразу будет следовать R8

$\boxed{\text{Док-во}}$
$x \in \pi^{-1} X_j(\dot{-}(-u,a))$
$y \in \pi^{-1} X_{-j,-i}(-b)$
$w \in \pi^{-1} X_{j,-i}(-\varepsilon_j a b)$
$z \in \pi^{-1} X_{-i,-k}(1)$

Тогда $[x^{-1},y]w \in \pi^{-1} X_i((u,-\bar{a}) \leftarrow b)$

$[[x^{-1},y]w, z]$ = коммутатор в левой части

$$= {}^{[x^{-1},y]}[w,z] \cdot [[x^{-1},y],z]$$

x коммутирует с z $\longrightarrow$

$$x \in \pi^{-1} X_j(u, -a + B(u,u)) = \pi^{-1} X_j(u, -\bar{a})$$

$$= {}^{x^{-1}y}[x,[y^{-1},z]] =$$

$$= {}^{x^{-1}}[y,[x,[y^{-1},z]]] \cdot [x,[y^{-1},z]]$$

$[y^{-1},z] = S_{-j,-k}(b) \xrightarrow{R8}$ $[x,[y^{-1},z]] \in \pi^{-1} X_{j,-k}(+\varepsilon_j \bar{a} b) X_k((u,a) \leftarrow b)$

$$[y,[x,[y^{-1},z]]] = [\pi^{-1}X_{-j,-i}(-b),\ \pi^{-1}X_{j,-k}(\varepsilon_j \bar a b)]$$

$$= [\pi^{-1}X_{ij}(-\varepsilon_i b \varepsilon_{-j}),\ \pi^{-1}X_{j,-k}(\varepsilon_j \bar a b)] = S_{i,-k}(-\varepsilon_i \bar b\, \mathcal{I}^{-1} \bar a b)$$

Итого $[w,z] = S_{j,-k}(-\varepsilon_j a b)$ — коммутирует с $[x^{-1},y]$
— коммутирует с $S_{i,-k}(\ldots)$

$[y,[x,[y^{-1},z]]]$ коммутирует с x

Левая часть теперь равна $[w,z]\cdot {}^{x^{-1}}[x,[y^{-1},z]] =$

$$= [w,z]\cdot \underbrace{[x^{-1},[x,[y^{-1},z]]]}\cdot[x,[y^{-1},z]]$$

$$\| \quad [\pi^{-1}X_j(u,-\bar a),\ \pi^{-1}(X_k((u,a)\leftarrow b))]$$

$$\| \quad S_{j,-k}(\varepsilon_j B(u,u)\, b)$$

$$\rightsquigarrow S_{j,-k}(\varepsilon_j \underbrace{(-a+B(u,u))}_{\sim \bar a}\, b) \qquad \square$$

Rg доказано для четной группы — там стоит 0.