А. Ставрова
04.09.2012

Методы обобщения результатов с расщепимых групп на изотропные на примере вычисления центра

R — комм. кольцо с 1

G/R простая редуктивная групповая схема [SGA 3 III]
(сокращенно: простая группа)

$G \longleftrightarrow A$ — алгебра Хопфа над R
(может быть не определена над $\mathbb{Z}$)

Если S — R-алгебра, то $G(S) = Hom_R(A, S)$

„G расщепима локально в fpqc-топологии"
(или этальной)

$\rightsquigarrow \exists$ комм. кольца S_i $1 \le i \le k$ и инъективный гомоморфизм $R \longrightarrow \prod_{i=1}^{k} S_i$

т.ч. $G_{S_i} \cong H_i$ — простая группа Шевалле

G_{S_i} — простая группа над $S_i \longleftrightarrow A \otimes_R S_i$

$G_{S_i}(S_i) = G(S_i) \cong H_i(S_i)$

H_i могут быть разного типа

Изотропная простая группа над R — такая, которая содержит собственную параболическую подгруппу P (опять же разных типов)
(т.е. связную, гладкую, ..., такую, что P_{S_i} — параболическая подгруппа в H_i)

над R: $P \cong L_P \ltimes U_P$ и $\exists ! P^-$ — параболическая

т.ч. $P \cap P^- = L_P$

(см. [SGA 3 III Exp. XXVI])

$E_P(R) = \langle U_P(R), U_{P^-}(R) \rangle$

Корневые подсхемы ([PS'08])

Пусть $R = \prod_{i=1}^{N} R_i$, R_i — комм. кольца, $R \xrightarrow{p_i} R_i$

Тогда $G(R) = G(R_1) \times \cdots \times G(R_N) \rightsquigarrow G_{R_i} \leftrightarrow A \otimes_R R_i$ — простая группа над R_i

$E_P(R) = E_P(R_1) \times \cdots \times E_P(R_N)$

[PS]: доказано, что всегда можно найти такое разложение, что $\forall\, G = G_{R_i}$ над $R = R_i$ выполняется

① Есть инъективный гомоморфизм $R \longrightarrow S$ т.ч. G_S — группа Шевалле типа Φ (система корней)

② $P_S (P_S^-)$ — стандартные параболические типа $J \subseteq \Pi \subseteq \Phi$ (J — лежат в унип. радикале; Π — простые)

③ Есть относительные корневые подсхемы

$X_\alpha \subseteq G$, — замкнутые подсхемы

$\alpha \in \Phi_P$ — система относительных корней, соответствующая параболической P

и V_α — конечно порожденные проективные R-модули

$$\{X_\alpha(v) \mid v \in V_\alpha\} = X_\alpha(R)$$

Как выглядит Φ_P?

$$\Phi_P = \Phi_{J,\Gamma} \qquad J \subseteq D = \Pi, \quad \Gamma \leq \mathrm{Aut}(D)$$

D — диаграмма Дынкина

$$\Phi_{J,\Gamma} = \Phi/\sim \qquad \Phi \xrightarrow{\pi} \Phi/\sim$$

$$\alpha \sim \beta \iff \sum_{\gamma\in\Gamma} m_{\gamma(i)}(\alpha) = \sum_{\gamma\in\Gamma} m_{\gamma(i)}(\beta) \text{ для любого } i \in J$$

С точки зрения группы Шевалле G_S

$$G_S(S) \ni X_\alpha(v) = \prod_{i\geq 1} \prod_{\beta\in\pi^{-1}(i\alpha)} x_\beta(a_\beta)$$

// см. th. 2 — [PS'08]

Свойства $X_\alpha(v)$:

① $\forall g \in L_P(R)$ $\quad gX_\alpha(v)g^{-1} = \prod_{i\geq 1} \prod_{\beta\in\pi^{-1}(i\alpha)} X_{i\alpha}(\varphi^i_{g,\alpha}(v))$

где $\varphi^i_{g,\alpha} : V_\alpha \longrightarrow V_{i\alpha}$

— R-однородное полиномиальное степени i

② $X_\alpha(u)X_\alpha(v) = X_\alpha(u+v) \cdot \prod_{i\geq 2} X_{i\alpha}(q^i_\alpha(u,v))$

где $q^i_\alpha : V_\alpha \oplus V_\alpha \longrightarrow V_{i\alpha}$ — однородно степени i

③ $\alpha \neq -k\beta$, $k \in \mathbb{N}$

$$[X_\alpha(u), X_\beta(v)] = \prod_{\substack{i,j>0 \\ i\alpha+j\beta\in\Phi_P}} X_{i\alpha+j\beta}(N_{\alpha\beta ij}(u,v))$$

$N_{\alpha\beta ij} : V_\alpha \times V_\beta \longrightarrow V_{i\alpha+j\beta}$

— однородное степени (i,j)

Замечание: разложение унипотентов

$\alpha = \beta + \gamma \rightsquigarrow$ $\qquad x_\alpha(u) = [x_\beta(v), x_\gamma(\cancel{w})]$

$$X_\alpha(u) \overset{?}{=} [X_\beta(v), X_\gamma(w)] \cdot \Pi(\ldots)$$

Нужно: $u = N_{\alpha\beta ij}(v, w)$ для некоторых $v \in V_\beta$, $w \in V_\gamma$

[LS'11], Lemmas 2, 3

Замечание: если R — связное кольцо, то сразу $R = R_i$

(например, локальное)

$\boxed{\text{Теорема}}$ Пусть G — простая группа над R, $P \lneq G$ — парабол. подгруппа и $\forall$ макс. идеала $m \trianglelefteq R$ группа G_{R_m} содержит параболическую подгруппу $Q \leq G_{R_m}$ т.что $\operatorname{rk} \Phi_Q \geq 2$

(или: $G_{R_m} \supseteq (\mathbb{G}_m)^2$) — это то же самое: см. SGA 3 III Exp. $\overline{\text{XXVI}}$, §7.

Тогда $\operatorname{Cent}(G)(R) = \operatorname{Cent}(G(R)) = \operatorname{Cent}_{G(R)}(E_P(R))$

$\boxed{\text{Замечание}}$ При этом условии $E_P(R) = E(R)$ не зависит от P [PS]

Доказательство Достаточно доказать $g \in \operatorname{Cent}_{G(R)}(E_P(R)) \Rightarrow g \in \operatorname{Cent}(G)(R)$

// включения $\operatorname{Cent}(G)(R) \subseteq \operatorname{Cent}(G(R)) \leq \operatorname{Cent}_{G(R)}(E_P(R))$ очевидны)

Редукция 1: $\operatorname{Cent}(G) \leq G$ — замкнутая подгруппа

$\rightsquigarrow$ достаточно доказать, что $g \in \operatorname{Cent}(G)(R_m)$ для всех максимальных $m \trianglelefteq R$

(другой вариант редукции к локальным кольцам: локально-глобальный принцип Суслина = лемма Квиллена–Суслина:

$g \in G(R[X], XR[X])$ и $g \in E(R_m[X])$ $\forall m \trianglelefteq R$

$\Rightarrow g \in E(R[X])$)

То есть, можно считать $R = R_m$? Не совсем

$E_P(R) = \langle X_\alpha(u), \alpha \in \Phi_P, u \in V_\alpha \rangle$

Если $g X_\alpha(u) g^{-1} = X_\alpha(u)$ для $\forall u \in V_\alpha \not\Rightarrow$

$$g X_\alpha(u) g^{-1} = x_\alpha(u) \quad \forall u \in V_\alpha \otimes_R R_m$$

Еще: хорошо бы заменить P на Q

Лемма (о замене параболической)

Пусть $P_1 \leq P_2$ — две параболические в простой группе H над кольцом B

Тогда $\exists k > 0$ т.ч. $\forall \alpha \in \Phi_{P_1}$ $\forall v \in V_\alpha$ $\exists \beta_i, \gamma_{ij} \in \Phi_{P_2}$ и $v_i \in V_{\beta_i}$, $u_{ij} \in V_{\gamma_{ij}}$, $k_i, n_i, l_{ij} > 0$ $(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m_i)$

т.ч. $X_\alpha(xy^k v) = \prod_{i=1}^{m} \left(X_{\beta_i}(x^{k_i} y^{n_i} v_i)\right)^{\prod_{j=1}^{m_i} x_{\gamma_{ij}}(y^{l_{ij}} u_{ij})}$

В частности, $E_{P_1}(R) = E_{P_2}(R)$

$\boxed{\text{Лемма}}$ ⇝ $\forall \alpha \in \Phi_Q$, $v \in V_\alpha$ — модуль над R_m

$$g X_\alpha(\lambda v) g^{-1} = X_\alpha(\lambda v)$$

для некоторого $\lambda \in R \setminus m$

~~Новое утверждение~~ R_m — локальное кольцо

⇝ м. считать, что Q — минимальная параболическая (не обязательно борелевская!)

⟶ $\Phi_Q = A_\ell, \dots, G_2, BC_\ell$ // см. [SGA 3 III, Exp XXVI, §7]

$\boxed{\text{Лемма-замечание}}$ ~~Если~~

Если $g \in L_P(R)$, то $\overset{(*)}{\Rightarrow} g$ централизует всю $E_P(R)$

Док-во:

$$g X_\alpha(v) g^{-1} = X_\alpha(\varphi^1_{\alpha, g}(v)) \cdot \prod_{i>1} X_{i\alpha}(\dots)$$

линейное $V_\alpha \to V_\alpha$

// можно побороть и хвост: применим g^{-1} + индукция по высоте!

Переменуем: R — лок. кольцо

$G/_R$ — простая группа

$P \subseteq G$ — минимальная параболическая

$g \in G(R)$ удовлетворяет

$(*)$: $\forall \alpha \in \Phi_P$ $\exists e_{\alpha 1}, \dots, e_{\alpha k} \in V_\alpha$ — система порождающих:

g централизует $X_\alpha(e_{\alpha i})$

Нужно доказать: $g \in Cent(G)(R)$

Открытие: перейти к расщепимой группе, заменив R на S

т.к. $E_P(S) = E_B(S)$ ⟶ заменим, как выше, P на B — борелевская в G_S

и будет $g \in Cent_{G(S)}(E(S))$ — группа Шевалле ⇝ сошлемся на Абе

Т.е. осталось доказать, что $\overset{(*)}{\Rightarrow} g \in L_P(R)$

Шаг 1: $R = k$ — поле

Т.к. $L_P \leqslant G$ замкнутая подгруппа, достаточно д-ть, что $g \in L_P(\bar{k})$

То есть, можно опять считать, что G — группа Шевалле.

Нам дано, что g централизует $X_\alpha(e_{\alpha i}) = \prod_{\gamma \in \pi^{-1}(\alpha)} x_\gamma(c_{\gamma i})$

+ используем разложение Брюа для g

- достаточно знать, что $\forall \gamma \in \pi^{-1}(\alpha)$ найдется такой $e_{\alpha i}$, что $c_{\gamma, i} \neq 0$

$$\Phi \longrightarrow \Phi_P = \Phi_{J, \Gamma}$$

$\pi^{-1}(\alpha) = \{\gamma \in \Phi \mid m_i(\gamma)$ фиксировано для $i \in J\}$

Шаг 2: $\rho: R \longrightarrow R/_m = k$

$\rho(g) \in L_P(k)$. Тогда $\rho(g) \in \Omega_P(k)$, где $\Omega_P = U_P \times L_P \times U_P^-$

$\Rightarrow g \in \Omega_P(R)$ см. Matsumoto — Ω — главная открытая клетка G

Более того, $\rho(g)\in L_P(k) \Rightarrow g\in \underset{\substack{\parallel \\ \langle X_\alpha(\mathfrak{m} V_\alpha),\ \alpha\in\Phi_P\rangle}}{U_P(\mathfrak{m})}\, L_P(R)\, U_{P^-}(\mathfrak{m})$

Шаг 3: если $g\in U_P(\mathfrak{m})L_P(R)U_{P^-}(\mathfrak{m})$ и $(*)$

$\Rightarrow g\in L_P(R)$

Док-во: много комм. формулы Шевалле (как у Абе-Херли)

берем $\underset{\substack{\uparrow \\ \Phi_P^+}}{X_\alpha}(v)$ – входит в g, α – min высоты

Найдем простой $\beta\in\Phi_P$ т.ч. $\alpha+\beta\in\Phi_P$ // rk ≥ 2

Хотется $e_{\beta i}$: $[X_\alpha(v), X_\beta(\underset{\substack{\uparrow \\ V_\beta}}{e_{\beta i}})]\neq 1$ и использовать $[g, X_\beta(e_{\beta i})]=1$

из системы обр.

поскольку $[X_\alpha(v), X_\beta(e_{\beta i})] = X_{\alpha+\beta}(N_{\alpha\beta 11}(v, e_{\beta i}))\cdot\prod(\ldots)$

где $N_{\alpha\beta 11}: V_\alpha\times V_\beta \longrightarrow V_{\alpha+\beta}$ билинейна

Если нет, то $N_{\alpha\beta 11}(v,-)=0$,

это же верно и после перехода $R\longrightarrow S$

где G_S расщепима

Но там $X_\alpha(v)=\prod_{\gamma\in\pi^{-1}(\alpha)} x_\gamma(v_\gamma)$, и можно подобрать (почти всегда)

$\delta\in\pi^{-1}(\beta)$ т.ч. $[\prod x_\gamma(v_\gamma), x_\delta(1)]\neq 1$.

– ибо оно содержит $x_{\gamma+\delta}$

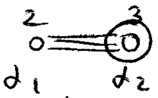
Тогда $x_\delta(1) \longleftrightarrow u\in V_\beta\otimes_R S$

$\equiv X_\beta(u)$ $\rightsquigarrow N_{\alpha\beta 11}(v,u)\neq 0$

(по конструкции X_α)

$U_P=\prod_{\alpha\in\Phi_P^+} X_\alpha$ – прямое произведение подсхем

и в $(U_P)_S(S)$ это соответствует ~~...~~ представлению эл-та в виде $\prod_{\alpha\in\Phi_P^+}\prod_{\gamma\in\pi^{-1}(\alpha)} x_\gamma(s)$

G_2 

$[\underset{\substack{\Downarrow \\ L_P}}{X_{\alpha_1}}, \underset{\substack{\Downarrow \\ V_1}}{X_{\alpha_2}}] = X_{\alpha_1+\alpha_2}X_{2\alpha_1+2\alpha_2}X_{\alpha_1+3\alpha_2}X_{2\alpha_1+3\alpha_2}$

$V_1: m_2(\alpha)=1$

$V_2: m_2(\alpha)=2$

$V_3: m_2(\alpha)=3$