11.09.2012

А. Ставрова

Гомотопическая инвариантность нестабильных K_1-функторов

R — комм. кольцо

$G/_R$ — простая алгебраическая изотропная группа
(или редуктивная!)

$P \subseteq G$ — параболическая подгруппа

$\mathrm{rk}\, \Phi_P \geq 2 \rightsquigarrow E(R) = E_P(R) \trianglelefteq G(R)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \parallel$ — в частность

$\qquad\qquad\qquad\qquad E_{gPg^{-1}}(R)$

$G(R)/E(R) = K_1^G(R)$ — нестабильный K_1-функтор
(группы Уайтхеда)

A — R-алгебра $\rightsquigarrow G(A)$, $E(A)$, $K_1^G(A)$, поэтому K_1^G — функтор

частный случай: $G = GL_n$, $K_1^{GL_n}(R) = GL_n(R)/E_n(R)$

$K_1(R) = \lim\limits_{n\to\infty} GL_n(R) / \lim\limits_{n\to\infty} E_n(R)$ // Bass, 1964] GL_n
Suslin 1977

Abe 1983
„Whitehead groups of Chevalley groups"
— но там ошибка

Теорема 1

$G(k[x_1,\dots,x_n]) = G(k)E(k[x_1,\dots,x_n]) \quad \forall n \geq 1$

– здесь все еще нужно требовать $\mathrm{rk}\,\Phi_P \geq 2$, иначе контрпример (Cohn)

– K_3 для общего случая не определено (можно определить по Володину, но это нигде не написано)

(или $K_1^G(\mathbb{A}_k^n) \cong K_1^G(k)$)
— $\mathbb{A}^n$-инвариантность

Теорема 2 = следствие теоремы 1

Пусть k — совершенное поле, A — регулярная k-алгебра.

Тогда $K_1^G(\mathbb{A}_A^1) \cong K_1^G(A)$ (для $\mathbb{A}^n$, конечно, это тоже верно)

(т. 1 — локальная (в топологии Нисневича) часть теоремы 1)

Доказательство теоремы 1

– как у Абе; по индукции.

База: теорема Марго–Суне: $G(k[x]) = G(k)E(k[x])$

// для групп Шевалле — см. Steinberg, Лекции...

// можно ли это перенести? нужны представления

Переход: использует теорему 3:

Теорема 3 (склейка для $\mathbb{P}^1 = \mathbb{A}^1 \cup \mathbb{A}^1$)

Пусть A — коммутативное кольцо, G/A — простая группа, $P \leq G$ — т.ч. $\mathrm{rk}\, \Phi_P \geq 2$

Если $x \in G(A[x], X)$ и $\exists y \in G(A[x^{-1}])$ т.ч.

$$\begin{array}{c} G(A[x], X) \\ \| \text{def-сокращение} \\ G(A[x], xA[x]) \end{array}$$

$xy^{-1} \in E(A[X, X^{-1}])$,
то $x \in E(A[X])$

При чем здесь $\mathbb{P}^1$? Нетрудно проверить, что это равносильно точности последовательности

$$1 \longrightarrow \underset{\substack{\wr\| \\ K_1^G(\mathbb{P}^1_A)}}{K_1^G(A)} \xrightarrow{g \mapsto (g,g)} K_1^G(A[X]) \times K_1^G(A[x^{-1}]) \xrightarrow{(g_1,g_2) \mapsto g_1 g_2^{-1}} K_1^G(A[X, X^{-1}])$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{G}_m \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{A}^1 \arrow[d] \\ \mathbb{A}^1 \arrow[r] & \mathbb{P}^1 \end{tikzcd}$$

$\rightsquigarrow$ посл-сть Майера–Виеториса

Если A — поле, это очевидно. Если нет — сводим к случаю поля.
Достаточно доказать для локального кольца (далее — локально-глобальный принцип)

$\rho : A \longrightarrow A/I = \ell$, $I \trianglelefteq A$ — максимальный идеал

Достаточно доказать

(*) $$\begin{array}{c} E^*(A[x, x^{-1}], I) = E^*(A[x], I) \cdot E^*(A[x^{-1}], I) \\ \| \\ \mathrm{Ker}\, \rho \cap E(A[X, X^{-1}]) \end{array}$$

Теорема 0.

Пусть A — локальное кольцо, $G/A, \ldots$ — как выше.

Тогда $$E(A[X, X^{-1}]) = E(A[X])\, E(A[x^{-1}])\, E(A[x])$$

// а если A не локально, можно ли взять побольше сомножителей?

Следствие

(*) верно:

$x \in E(A[x, x^{-1}])$, $x = x_1 y x_2$, $\rho(x) = 1 \Rightarrow \rho(y) = \rho(x_1^{-1} x_2^{-1})$

$E(\ell[x]) \cap E(\ell[x^{-1}]) = E(\ell)$

$y \in E(A) E^*(A[x^{-1}], I)$, $x \in E(A[x]) E^*(A[x^{-1}], I) E(A[x])$.

Дальше нужно доказать, что

$$E^*(A[x^{-1}], I)E(A[x]) = E(A[x])E^*(A[x^{-1}], I)$$

– это некая работа (разложение Гаусса)

(у Абе здесь разложение Брюа; а для изотропных групп его нет – есть только для min параболической. (см. Borel – Tits))

Доказательство теоремы 0

$$Z \stackrel{def}{=} E(A[X])E(A[X^{-1}])E(A[X])$$

$$E(A[X,X^{-1}]) = \langle X_\alpha(u), \alpha \in \Phi_P, u \in V_\alpha \otimes_A A[x,x^{-1}] \rangle$$

Считаем, что P – минимальная параболическая

Достаточно доказать, что $X_\alpha(X^{-k}u)Z \subseteq Z$ для $k \in \mathbb{N}, u \in V_\alpha$

Идея Абе: использовать $\sigma \in Aut(G(A[x,x^{-1}]))$ такой, что $\sigma|_{L_P} = id_{L_P}$, $\sigma(X_\alpha(u)) = X_\alpha(X^{m_1(\alpha)}u)$ – существование σ доказывается спуском

$m_1(\alpha)$ – коэффициент в разложении α при первом корне.

Какой из них первый?

$P \rightsquigarrow \Phi_P = A_\ell - G_2, BC_\ell, \ell \geq 2$ + внешняя вершина

α_1 – такой простой корень, что U_{P_1} абелев или
макс. параб.

Экстраспециален, если абелева нет.
(есть единств. корень с коэфф. 2 $\Leftrightarrow$ этот простой корень соединен со старшим в расширенной диаграмме Дынкина)

$\sigma \longleftrightarrow$ характер на системе корней Φ_P,
$\alpha \longmapsto X^{m_1(\alpha)} \in A[x,x^{-1}]$

Мы докажем, что $\sigma^{\pm 1}(Z) \subseteq Z$.

Тогда все просто: $\underset{\Phi_P^+}{X_\alpha}(X^{-k}u)Z = \sigma^{-k}(\sigma^k(X_\alpha(X^{-k}u)Z))$
$\subseteq \sigma^{-k}(X_\alpha(X^{k(m_1(\alpha)-1)}u)Z)$

$\boxed{\text{Лемма 1}}$

$$\sigma^{\pm 1}(E(A[X], X)) \subseteq \begin{cases} E(A[X]), \text{ если } U_{P_1} \text{ абелев} \\ E(A[X])X_{\mp\tilde{\alpha}}(X^{-1}V_{\mp\tilde{\alpha}}) \end{cases}$$

старший корень Φ_P.

т.е. $X_\alpha(Xu) \xrightarrow{\sigma} X_\alpha(u)$
$X_{\tilde{\alpha}}(Xu) \xrightarrow{\sigma} X_{\tilde{\alpha}}(x^{-1}u)$

Породим $E(A[X],X)$.

R, $J \trianglelefteq R$ — идеал, $P \leq G$, Φ_P

Опр. m_α: $\mathbb{Z}\alpha \cap \Phi_P = \{-m_\alpha\alpha, \dots, -\alpha, \alpha, 2\alpha, \dots, m_\alpha\alpha\}$

$$\underset{\substack{\Uparrow\\ E(R)}}{\mathbb{Z}_\alpha(a}, \underset{\substack{\Uparrow\\ V_\alpha}}{u_1}, \underset{\substack{\Uparrow\\ V_{2\alpha}}}{u_2}, \dots, \underset{\substack{\Uparrow\\ V_{m_\alpha\alpha}}}{u_{m_\alpha}}) = a\cdot\left(\prod_{i=1}^{m} X_{i\alpha}(u_i)\right)a^{-1}$$

$$E_\alpha(R) = \langle X_{i\alpha}(V_{i\alpha}),\ -m_\alpha \leq i \leq m_\alpha \rangle$$

Лемма 2

$$E_P(R,J) = \langle \overset{E_\alpha(J)^{E_\alpha(R)}}{E_\alpha(R,J)}, \alpha \in \Phi_P \rangle$$
$$= \langle Z_\alpha(a, u_1, \dots, u_{m_\alpha}),\ a \in E_\alpha(R),\ 1 \leq i \leq m_\alpha,\ u_i \in J \otimes_R V_{i\alpha} \rangle$$

Доказательство: обобщенная комм. формула Шевалле.

Лемма 3

$$E(A[X],X) = \langle Z_\alpha(a, u_1, \dots, u_{m_\alpha}),\ \alpha \in \Phi_P,\ a \in E_\alpha(A),\ u_i \in XA[X] \otimes_A V_{i\alpha} \rangle$$

Замечание $E^*(A[X],X) = E(A[X],X)$

$E(A[X]) = E(A) \ltimes E(A[X],X)$ — тоже нехитро доказывается

Лемма 4 (вернулись к случаю локального кольца A)

Пусть $\alpha \in \Phi_P$, $2\alpha \notin \Phi_P$, $m_1(\alpha) = \pm 1$.

Тогда $\sigma(E_\alpha(A[X],X)) \subseteq E(A[X])$

Доказательство

$m_\alpha = 1$ $\quad \sigma(Z_\alpha(\underset{\substack{\Uparrow\\ E_\alpha(A)}}{a}, \underset{\substack{\Uparrow\\ XA[X]\otimes_A V_\alpha}}{u})) = \sigma(a)\, X_\alpha(X^{m_1(\alpha)}u)\, \sigma^{-1}(a)$

$E_\alpha(-)$ — элементарная подгруппа в некоторой редуктивной подгруппе $G_\alpha \leq G$

В G_α есть минимальная параболическая подгруппа $L_{1P} X_\alpha$, противоположная — $L_P X_{-\alpha}$.

$\exists\, n_\alpha \in E_\alpha(A)$: $n_\alpha X_{-\alpha} n_\alpha^{-1} = X_\alpha$
локально

$\rightsquigarrow$ м. считать, что $m_1(\alpha) = 1$, а не -1 (запихать n_α в a)

В G_α есть разложение Гаусса:

$$E_\alpha(A) \ni a \in \left(L_\beta(A) \cap E_\alpha(A)\right) \cdot X_\alpha(u_1)\, X_{-\alpha}(u_2)\, X_\alpha(u_3)$$

$$u_1, u_3 \in V_\alpha,\ u_2 \in V_{-\alpha}$$

$$\rightsquigarrow \sigma(a) \in E_\alpha(A[X])\, X_{-\alpha}(X^{-1}u_2)\, X_\alpha(Xu_3)$$

$$^{\sigma(a)}X_\alpha\left(X^{w_1(\alpha)}u\right) \in {}^{E_\alpha(A[X])}\Big(\underset{V_\alpha}{X_{-\alpha}(X^{-1}u_2)}\ \underset{A[X]\otimes V_\alpha}{X_\alpha(X^2 w)}\Big)$$

$$X_\alpha(X^2 w) = [X_{\alpha+\beta}(Xw_2), X_{-\beta}(Xw_2)]$$

$$N_{\alpha+\beta,-\beta,1,1} : V_{\alpha+\beta} \times V_{-\beta} \longrightarrow V_\alpha$$

$\otimes$?

Если α – короткий корень в G_2, β – длинный

$(\alpha+\beta) - (-\beta)$ – не корень

Лемма ([LLS], л. 2, (1 б)):

$$X_\alpha(X^2 w) = [X_{\alpha+\beta}(u), X_{-\beta}(X^2 v)]\, X_{2\alpha+\beta}(X^2 w_1) \cdot$$
$$\cdot X_{3\alpha+2\beta}(X^2 w_2)\, X_{3\alpha+\beta}(X^4 w_3)$$

$$^{X_{-\alpha}(X^{-1}b)}X_{3\alpha+2\beta}(X^2 w_2) = X_{3\alpha+2\beta}(X^2 w_2)$$

$$^{X_{-\alpha}(X^{-1}b)}[X_{\alpha+\beta}(u), X_{-\beta}(X^2 v)] = [X_{\alpha+\beta}(u) X_\beta(X^{-1}c_1),$$
$$X_{-\beta}(X^2 v) X_{-\alpha-\beta}(Xc_2) \cdot$$
$$\cdot X_{-2\alpha-\beta}(c_3) \cdot$$
$$\cdot X_{-3\alpha-\beta}(X^{-1}c_4) \cdot$$
$$\cdot X_{-3\alpha-2\beta}(Xc_5)]$$