Кратная коммутационная формула

А.В. Степанов

Обобщаем формулу Бака:

$$\underbrace{[SL_n(R), \dots, SL_n(R)]}_{m} = E_n(R)$$

при $m=2$ K_1 должен быть абелев $\rightsquigarrow n \geq d+2$.

Вообще — при $m \geq \underbrace{BS\text{-}\dim R}_{\text{размерность Басса—Серра}} - n + 4$ $\;\geq \delta$. Более того, $n \geq 3$, $m \geq 2$

База индукции: $m=2$, $n \geq$ [redacted] $\delta + 2 \geq \mathrm{sr}\,R + 1$

Для исключительных групп нужно по-другому

G — односвязная групповая схема Шевалле-Демазюра, соотв. $\Phi \neq A_1$

$$\underbrace{[G(R), \dots, G(R)]}_{m} = E(R)$$

условие: $m \geq \delta + 1$

База индукции $m=1$ $\delta = 0 \rightsquigarrow G(R) = E(R)$

Сегодня мы узнаем, что

$$[G(R, I_1), \dots, G(R, I_m)] = [E(R, I_1 \cdot \ldots \cdot I_{m-1}), E(R, I_m)]$$

// коммутаторы левонормированные: $[[\cdot,\cdot],\cdot]$

$$[E(R, I_1), \dots, E(R, I_m)] \leq [G(R, I_1), \dots, G(R, I_m)] \leq G(R, I_1 \cdot \ldots \cdot I_m)$$

Как доказывается, что

$$[G(R, I), G(R, J)] \leq G(R, IJ) \quad ?$$

$G(R, I) = G(R) \cap GL_n(R, I)$ в представлении, и т.д.

Но можно сделать без представлений:

$R := K[G] \otimes K[G]$, I — фунд. идеал в одном, J — в другом

Сначала рассмотрим случай $I_k = R \ \forall k$

Определим $S^{(d)}G(R) = \bigcap\limits_{\substack{\varphi: R \to R' \\ \delta(R') \le d}} \mathrm{Ker}\left(G(R) \xrightarrow{\bar{\varphi}} K_1(R')\right)$

$$\varphi: R \to R' \rightsquigarrow \begin{tikzcd} G(R) \arrow[r, "G(\varphi)"] \arrow[rr, bend right, "\bar{\varphi}"'] & G(R') \arrow[r] & K_1(R') \end{tikzcd}$$

Индукционный переход:

$$[S^{(d)}G(R), \underset{\substack{\| \\ S^0 G(R)}}{G(R)}] \le S^{(d+1)}G(R)$$

① Достаточно доказать, что если $\delta(R) = d+1$, то $[S^{(d)}G(R), G(R)] \le E(R)$

Пусть

$$\widetilde{E}(R) = \bigcap_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ s_1, \dots, s_k \in Um_k(R)}} G(R, s_1 R) \cdot \ldots \cdot G(R, s_k R).$$ Тогда

$$[\widehat{E}(R), G(R)] \le E(R)$$

Посмотрим на $\widetilde{\widetilde{E}}(R) = \bigcap\limits_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ (s_1, \dots, s_k) \in Um_k(R) \\ \delta(R/_{s_1 R}) < \delta(R)}} G(R, s_1 R) \cdot \ldots \cdot G(R, s_k R)$

Тогда $S^{(d)}G(R) \le \widetilde{\widetilde{E}}$ (для кольца R с $\delta(R) = d+1$)

(Если $s_1 \in R \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{l} m_i$, то $\delta(R/_{s_1 R}) < \delta(R)$ **(**Bak's induction lemma**)**)

по одному макс. идеалу в каждой ~~неприводимой~~ ой компоненте MaxR

какой-то компоненте из определения $\delta(R)$

Поэтому достаточно доказать, что

$$[\widetilde{\widetilde{E}}(R), G(R)] \le E(R)$$

Берем $g \in G(R)$. Почему

$$[\widetilde{\widetilde{E}}(R), g] \le E(R) \ ?$$

$m_1, \dots, m_l$ — по одному из каждой (какой-то) компоненты;

$S = R \setminus \bigcup m_i \rightsquigarrow$ над $S^{-1}R$ $\lambda_S(g) \in E(S^{-1}R)$

$\rightsquigarrow \exists s_1 \in S^{-1}R : \lambda_{s_1}(g) \in E(\underbrace{S_1^{-1}R}_{R_{s_1}})$

Далее находим $s_2, \dots, s_k$: $(s_1, \dots, s_k) \in Um_k(R)$ и $\lambda_{s_i}(g) \in E(R_{s_i})$

Тогда $\widetilde{\widetilde{E}}(R) \le G(R, s_1 R) \cdot \ldots \cdot G(R, s_k R)$

$[G(R, s_1^{n_1} R) \ldots G(R, s_k^{n_k} R), g] \le E(R)$, т.к. это верно $\forall s_i$:

$[G(R, s^n R), g] \leq E(R) \quad \forall s \in R: \ \lambda_s(g) \in E(R_s)$

а это следует из commutator calculus:

$$[\underbrace{G(R[t], tR[t])}_{\ni a}, g]$$

$$\lambda_s([a,g]) \leq E(R_s[t]) \cap G(R_s[t], tR_s[t])$$

$$= E(R_s[t], tR_s[t]) \qquad // \text{dilation principle}$$

$\rightsquigarrow$ можно подобрать большую степень t т.ч. ...

Теперь относительный случай:

$$E(R) \rightsquigarrow EE(R, I, J) = [E(R,I), E(R,J)]$$

$$S^{(d)}G(R) \rightsquigarrow \cancel{S^{(d)}G(R, I, J) = \bigcap_{\substack{\varphi: R \to R' \\ \delta(R') \leq d}} G(\varphi)^{-1}(EE(R', \varphi(I)R', \varphi(J)R'))}$$

$$[S^{(d)}G(R,I), S^{(d)}G(R,J)] \leq [\tilde{\tilde{E}}(R,J), S^{(d)}G(R,J)]$$

то же, что и $\tilde{E}(R)$, только $G(R, s; I)$ вместо $G(R, s; R)$

Повторяем то же дальше

Теперь $a \in [G(R[t], tI[t]), G(R^{[t]}, J[t])] = a(t)$

$g \in G(R[t], K[t]), \quad \lambda_s(g) \in E[R_s[t], J_s(t)]$

$[a(t^g), g] \in$ где нужно: $[G(R[t], tI[t]), G(R[t], J[t]), E(tR_s[t], tR_s[t])]$

$$E(R, t^3 I) \leq E(tR, tI) = E(tI)^{E(tR)}$$