Суслин-Туленбаев

Теорема о стабилизации для K_2 Милнора

$\boxed{08.10.2012}$

С. Синчук

1. Разложение Денниса-Васерштейна

$$St(n,R) = StP^-_{n-1}(n,R)\, U^+_{1,n-1} \cdot StP^-_1(n,R)$$

$sr(R) \leq n-2$

Следствие

$$K_{1,n-1}(R) \hookrightarrow K_{1,n}(R)$$
$$K_{2,n-1}(R) \twoheadrightarrow K_{2,n}(R)$$

$\boxed{\text{Теорема}}$

$$sr(R) \leq n-2 \rightsquigarrow K_{2,n}(R) \hookrightarrow K_{2,n+1}(R)$$

Идея   Шаг 1

строим „модель" $St(n+1,R)$ исходя из $St(n,R)$

$G' = St(n,R) \ltimes M_{1,n}(R)$ „$= StP^-_n(n+1,R)$" $\leftarrow \left(\begin{array}{c|c} x & 0 \\ \hline u & 1 \end{array}\right)$

$G'' = St(n,R) \ltimes M_{n,1}(R)$ „$= StP^-_1(n+1,R)$" $\leftarrow \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline v & x \end{array}\right)$

$$V_1 = G'' \times R \times G'$$

$$V = V_1 / \sim$$

λ определено однозначно!

$G_\lambda \leq G'$ — состоит из некоторых элементов: таких, что если сопрячь при помощи $x_{1,n+1}(\lambda)$, то получится элемент из G'': $p \longmapsto {}^{x_{1,n+1}(\lambda)}p = S_\lambda(p) \in G''$

Тогда можно определить $\sim$ так:

$$(g'',\lambda,g') \sim (g_1'',\lambda,g_1') \overset{def}{\Longleftrightarrow} g' = \underset{G_\lambda}{\underset{\cap}{g}} \cdot g_1',\ g_1'' = g'' S_\lambda(g)$$

$$S_\lambda : \underset{G'}{\underset{\wedge}{G_\lambda}} \longrightarrow G'' \text{ — } \S 6$$

Шаг 2

$$St(n+1,R) \xrightarrow{f} Hom_{Sets}(V,V)$$ — какой угодно гомоморфизм

по смыслу — действие $(- \cdot x_{i,j}(-))$

$j \leq n \rightsquigarrow f(x_{i,j}(\xi))[g'',\lambda,g'] = [g'',\lambda,g' x_{i,j}(\xi)]$

$j = n+1 \rightsquigarrow$? определение — вычисление ($sr R \leq n-2$)

Нужно проверить соотн. Стейнберга (корректность f)

— непростое вычисление §8

Шаг 3 (доказательство теоремы)

$$St(n,R) \xrightarrow[\psi_{n,n+1}]{} St(n+1,R)$$

Пусть $\psi_{n,n+1}(x) = 1$

$\rightsquigarrow$ м. считать, что $x \in K_{2,n}(R)$

$f\,\psi_{n,n+1}(x)$ — тривиален

$$[1,0,1] = \left[1, 0, \left(\begin{array}{c|c} x & 0 \\ \hline * & 1 \end{array}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{c|c} x & 0 \\ \hline * & 1 \end{array}\right) \in G_0$$

Тогда $S_0\left(\begin{array}{c|c} x & 0 \\ \hline * & 1 \end{array}\right) = 1$

Теперь пользуемся сюръективностью стабилизации $K_{2,n-1}(R) \to K_{2,n}(R)$

$\Rightarrow$ "$x = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ & * \end{array}\right)$" x' $\rightsquigarrow$ знаем, как устроен S_0:

по определению (которое не написано)

$$S_0(*) = \begin{pmatrix} 1 & * & 0 \\ 0 & x' & 0 \\ 0 & * & 1 \end{pmatrix}$$

$$\uparrow$$

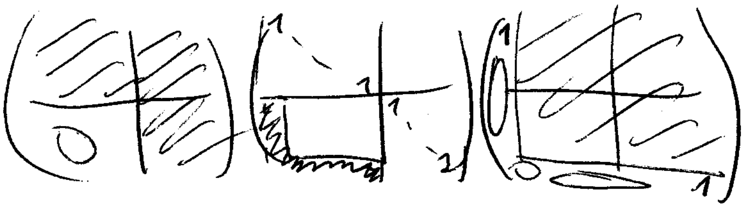
$$\left(\begin{array}{c|c} x & 0 \\ \hline * & 1 \end{array}\right)$$

т.е. $S_0\left(\begin{pmatrix} 1 & * & 0 \\ 0 & x' & 0 \\ 0 & * & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & * & 0 \\ 0 & x' & 0 \\ 0 & * & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow x = 1$

Как доказать для ~~…~~ других классических групп?

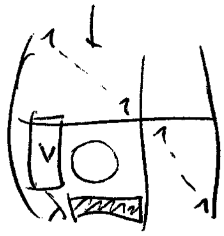
Четная ортогональная:



свобода выбора v, λ:

① $v_1 = gv$ g-образ.

② $v_1 = v + \lambda w$ произв.



— вроде бы это верно

$$\varphi : St(n,R) \longrightarrow E(n,R)$$

Как определить S_λ?

$G_\lambda \geq G_\lambda^1$

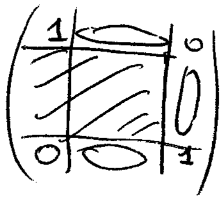
$G_\lambda \geq G_\lambda^2$

$\wedge\!\!\backslash$

G'

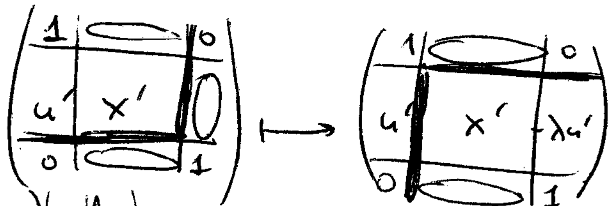
$$G_\lambda = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ u & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \varphi(x)_{1*} = \underset{(1\,0\ldots0)}{e_1} - \lambda u \right\}$$

$G_\lambda \geq G_\lambda^1 =$

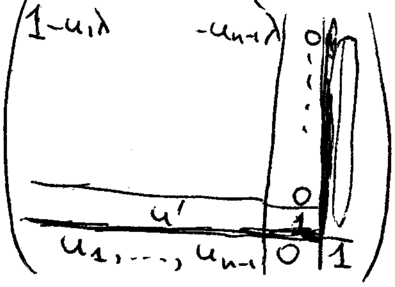


$\cup$

$$\left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; x \in StP_1^-(n,R) \right\}$$

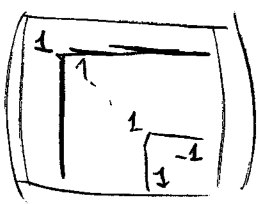


$G_\lambda \geq G_\lambda^2 =$



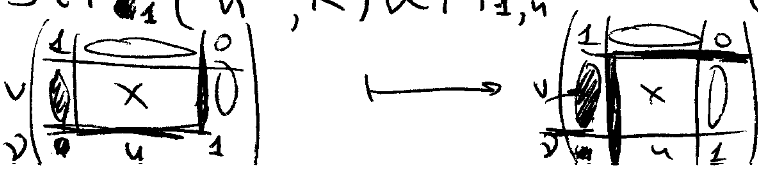
$\wedge\!\!\backslash$

G'

$S_\lambda^2 = ad$  $\cdot\, \sigma \circ ad(x'_{1n}(\lambda)) \cdot \tau$

$$\sigma : StP_1^-(n, R) \ltimes M_{1,n} \longrightarrow G''$$

— есть такой корректно определенный гомоморфизм



$\tau: G^2_\lambda \longrightarrow G'$

$$\left(\begin{array}{c|c|c} X' & 0 & 0 \\ \hline u' & 1 & 0 \\ u & 0 & 1 \end{array}\right) \longmapsto \left(\begin{array}{c|c|c} X' & 0 & 0 \\ \hline u & 1 & 0 \\ -u' & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$\boxed{\text{Лемма}}$ Любой элемент $g \in G_\lambda$ можно представить в виде

$$g_1 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & & & -\lambda\mu & \\ & \ddots & & & 0 \\ & & & 1 & \\ \hline 0 & & & \mu & 1 \end{array}\right) g_2, \quad g_i \in G^i_\lambda \quad \text{и}$$

$$Um_{n,2}(R) \quad \varphi(g_2)_{n,n-1} = 0$$

<u>Док-во</u>

$$g = \left(\begin{array}{c|c|c|c} & \lambda\nu & -\lambda\mu & 0 \\ \hline & v_1 & v_2 & 0 \\ \hline * & \nu & \mu & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[sr(R)+1 \leq n-1]{} \exists\, v \in M_{n-1,1}(R)$$

$$(v_1 - v\lambda\nu,\ v_2 - v\lambda\mu) \in Um_{n-1,2}(R)$$

из транзитивности действия на столбцах

$\exists\, \alpha \in E(n-1, R)$

$$\alpha \cdot (v_2 - v\lambda\mu) = e^T_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r} n-2\{ \\ 1\{ \end{array} \left(\begin{array}{c|c} v_3 & 0 \\ \hline \zeta & 1 \end{array}\right) \to \exists\, u_3 \in M_{1,n-2}(R):$$

$$u_3 v_3 = -\zeta$$

Пусть $x \in St(n, R)$ $\varphi(x) = \left(\begin{array}{c|c} e_{n-1} & 0 \\ \hline 0 \;\; u_3 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \alpha \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline v & e_{n-1} \end{array}\right)$

Легко видеть, что

$$g_1 = \left(\begin{array}{c|c} x^{-1} & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right), \quad g_2 = \begin{pmatrix} 1 & & \lambda\mu & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & -\mu & 1 \end{pmatrix} g_1^{-1} g \qquad \blacksquare$$

$$G_{\lambda,\mu} = \left\{ g \in G_\lambda^2 \;\middle|\; \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & -\lambda\mu & \\ & \ddots & & 0 \\ & & 1 & \\ \hline & & \mu & 1 \end{array}\right) g \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & \lambda\mu & \\ & \ddots & & 0 \\ & & 1 & \\ \hline & & -\mu & 1 \end{array}\right) \in G_\lambda^1 \right\}$$

У разложения выше есть „единственность" с точностью до $G_{\lambda,\mu}$

У $G_{\lambda\mu}$ есть 3 ~~набора~~ типа образующих ($\in$ sr $R \le n-2$)

$\boxed{\text{Лемма}}$ Если $g \in G_{\lambda,\mu}$, что

$$x''_{n+1,n}(\mu) \cdot S_\lambda^2(g)\, x''_{n+1,n}(-\mu)\; S_\lambda^1\left(\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & -\lambda\mu & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ \hline & & \mu & 1 \end{array}\right) \cdot g \cdot \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & \lambda\mu & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ \hline & & -\mu & 1 \end{array}\right)\right)$$

– выкладка для трех типов образующих

$$S_\lambda : G_\lambda \longrightarrow G''$$

$$S_\lambda\left(g_1 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & -\lambda\mu & \\ & \ddots & & 0 \\ & & 1 & \\ \hline & & \mu & 1 \end{array}\right) g_2 \right) = S_\lambda^1(g_1)\, x''_{n+1,n}(\mu)\, S_\lambda^2(g_2)$$

$$D = \{ h \in G_\lambda \mid S_\lambda(gh) = S_\lambda(g) S_\lambda(h) \}$$

Очевидно, что $D \supseteq G_\lambda^2$

$\boxed{\text{Лемма}}$ §7

$$\forall \nu \quad x'_{n-1,n}(\nu) \in D$$

$\boxed{\text{Лемма}}$ $\boxed{9.1}$ $i \ne k \to \forall q \in V$ существует представление

$[g'', \lambda, g']$: $\quad g' = \left(\begin{array}{c|c} X & 0 \\ \hline u & 1 \end{array}\right) \quad u_i = u_k = 0$

// sr $R \le n-2$

$\boxed{\text{Опр.}}$ $f(x_{i,n+1}(\mu))[g'', \lambda, g'] =$

$g' = \left(\begin{array}{c|c} y & 0 \\ \hline u_1 & 1 \end{array}\right)$ $\quad (u_1)_i = 0$

$\begin{pmatrix} \nu \\ v \end{pmatrix} = \varphi(y)_{*i}$

$$\left[g'' \left(\begin{array}{c|ccc|c} 1 & & & & \\ \hline & 1 & & & v\mu \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ \hline & & & & 1 \end{array}\right), \lambda + \nu\mu, g' \left(\begin{array}{ccc} 1 & & \\ & \ddots & \\ \hline & 1 & -\mu u_1 \\ \hline & & 1 \\ \hline & & & 1 \end{array}\right) \right]$$