# О разложении Басса–Кольстера

(On injective stability for $K_2$, Kolster, 1980)

15.10.2012
А. Лавренов

Определена ли группа $StU(2,R)$?

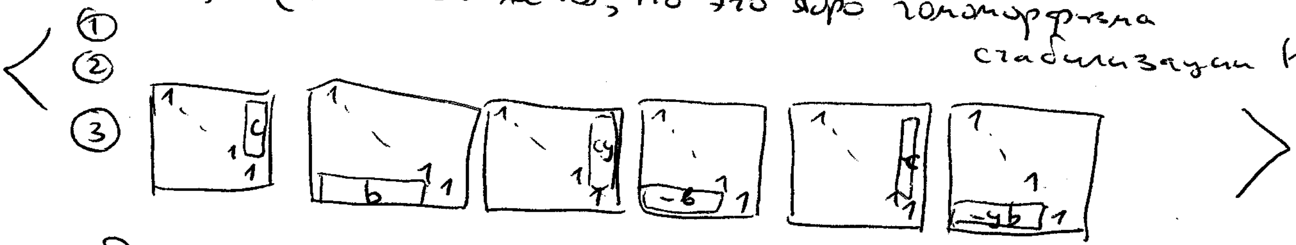
**Опр.** $St(n,R)$

(R1)
(R2) как обычно
(R3)

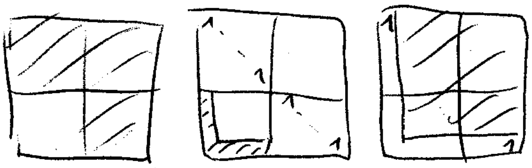
(R4) $w_{ij}(u)\,x_{ji}(q)\,w_{ij}(u)^{-1} = x_{ij}(-uqu)$, $u \in R^*$, $w_{ij}(u) = x_{ij}(u)\,x_{ji}(-u^{-1})\,x_{ij}(u)$

— соотношение Милнора

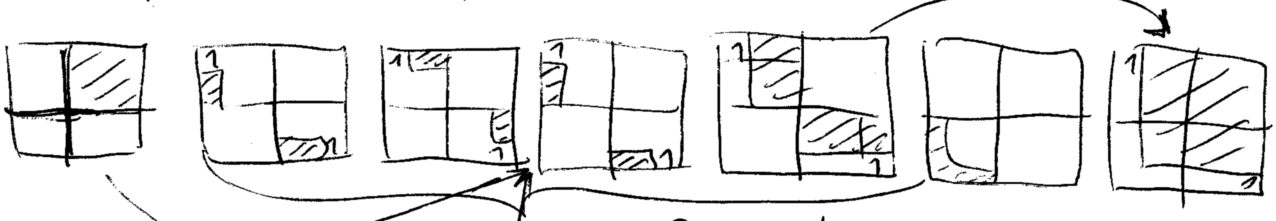
**Опр.** $W(n,R)$ (потом окажется, что это ядро гомоморфизма стабилизации $K_2$)



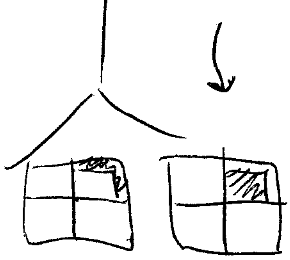
— образующие подсказаны соотношением R4 $\quad bc = -1$



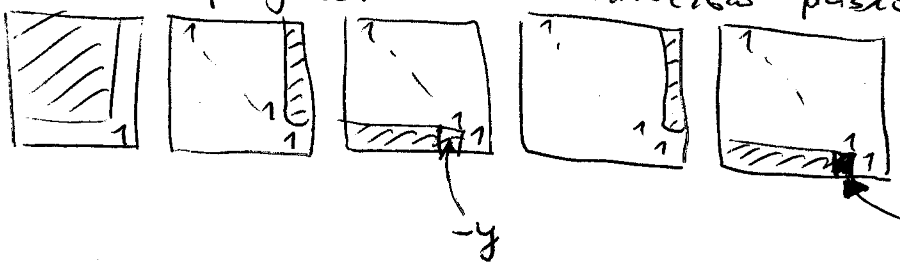
— разложение Денниса–Васерштейна



разложение Басса–Кольстера



Мы интересуемся единственностью разложения (Басса-Кольстера)

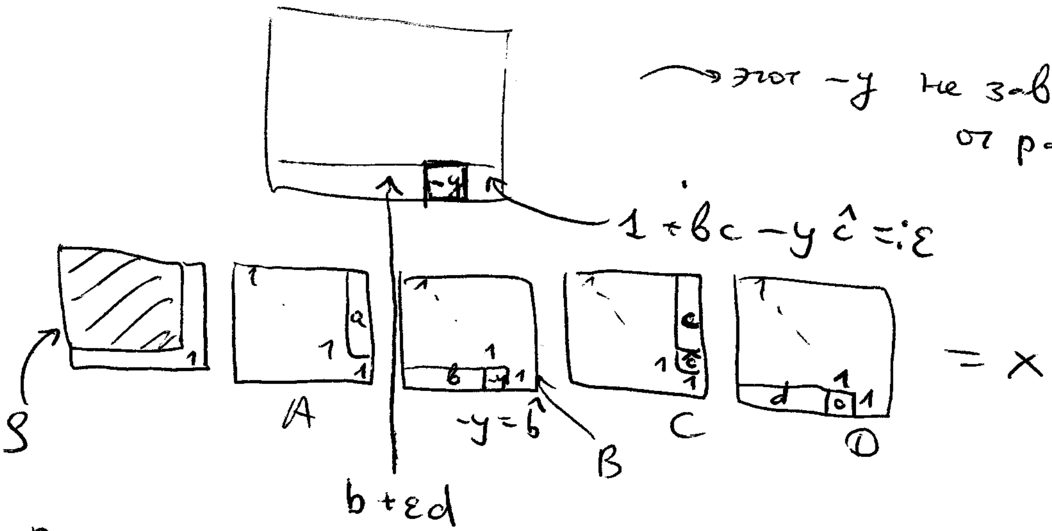



$n \geq sr\, R - 2$

$\Downarrow$

можно поставить 0

посмотрим на произведение:

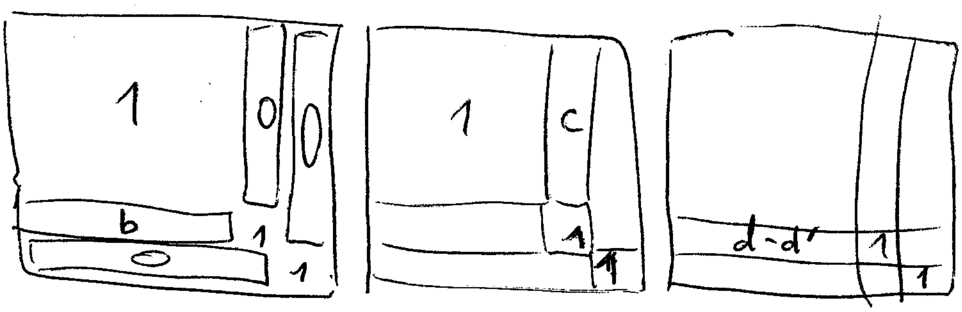



этот −y не зависит от разложения

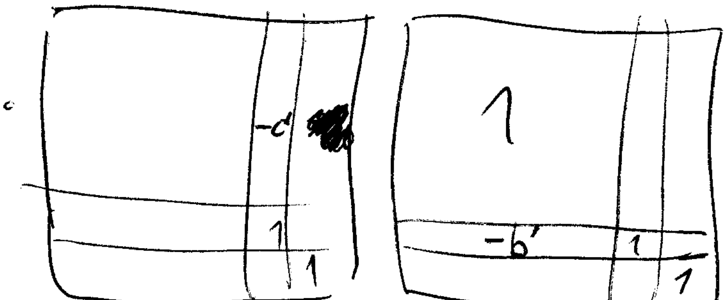
Пусть у нас есть второе такое разложение, с $a'$, $b'$, $-y'$, $c'$, $\hat{c}'$, $d'$.

$$M := g^{-1} g' = ABCDD'^{-1}C'^{-1}B'^{-1}A'^{-1}$$

$S :=$




.




$\boxed{\text{Упражнение}}$

$\varphi : St_n \longrightarrow E_n \rightsquigarrow$

$$\varphi(M) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta y & 0 \\ \gamma & 1+\delta y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \varphi(S) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ y\gamma & 1+y\delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Док-во

$$\varphi(M) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & a \\ 0 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc|c} \alpha & \beta y & \beta \\ \gamma & 1+\delta y & \delta \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & -a' \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) + \text{вычисление}$$

// например, $\alpha = 1 + c(d-d') + c'b' + c(d-d')c'b' - cb'$ ) □

Рассмотрим $\left(St_{n-1} \times U_1 \times U_1^- \times U_1 \times U_1^-\right) / \sim$

где $(g, ABCD) \sim (g', A', B', C', D') \overset{def}{\Longleftrightarrow}$

① $\varphi(g)ABCD = \varphi(g')A'B'C'D'$

② $g^{-1}g'$ примерно равно $S$
(по модулю ядра предстабилизации)

— можно заменить на

$g^{-1}g' = ABCD\, D'^{-1}C'^{-1}B'^{-1}A'^{-1} \in St_{n-1}$

в предположении, что выполняется сюръективная стабилизация для $K_2$, это следует из ①

Далее: $\begin{pmatrix} \alpha & \beta y \\ \gamma & 1+\delta y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ \boxed{u} & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \boxed{+wy} \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ \boxed{-v} & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

найдём такое $u$, чтобы получилось что-то унимодулярное вместо $\gamma$

$v := \gamma - (1+\delta y)u$

$w : vw = \delta$

$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ y\gamma & 1+y\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ \boxed{-yu} & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \boxed{-w} \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ \boxed{-yv} & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$y\gamma - y(1+\delta y)u = yv$

→ положим $z = \alpha'^{-1}\beta$ и домножим первую на $\begin{pmatrix} 1 & -zy \\ & 1 \end{pmatrix}$, а вторую на $\begin{pmatrix} 1 & -z \\ & 1 \end{pmatrix}$

первый результат обозначим $P^y$, второй — $P_y$

$\rightsquigarrow \varphi(MP^y) = \varphi(SP_y)$

$ABCDD'^{-1}C'^{-1}B'^{-1}A'^{-1}$ — вообще говоря, это в группе Стейнберга определять так опасно! нельзя определять отношение экв-сти, используя $St_{n-1}$.

$St_n \longrightarrow St_{n+1}$ $\quad n \geq sr R - 2$