Новые продвижения в задаче о нормальном строении и конгруэнц-проблеме

А. Ставрова

R — комм. кольцо с 1

$G/_R$ — редуктивная группа (групповая схема)

$P \leq G$ — собственная параболическая

$(G, P) \xrightarrow{\text{локально в топ. Зарисского}} \Phi =$ тип G

$\Pi \subseteq \Phi$ т.ч. P — стандартная параб.

$D = Dyn(\Pi)$

$J \subseteq \Pi \longleftrightarrow$ корни унип. радикала P

$*$-действие: $\Gamma \leq Aut(D)$

Эти дискр. инварианты постоянны на связных компонентах

$\to R = \oplus R_i$ т.ч. над R_i они постоянны

$\to$ считаем далее, что $R = R_i$

$\pi : \mathbb{Z}\Phi \longrightarrow \mathbb{Z}\Phi / \langle \alpha \in \Pi \setminus J,\ \sigma(\beta) - \beta,\ \sigma \in \Gamma, \beta \in J \rangle$

$\Phi_P = \Phi_{J,\Gamma} = \pi(\Phi) \setminus \{0\}$

$\boxed{\text{Пример}}$ $\Phi = A_l$

J, $|J| = k$

$\longrightarrow \Phi_P \simeq A_k$, $k \leq l$

Antieau, Williams, 2012:

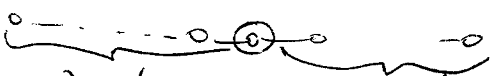
$\forall$ нечетного $n > 2$ $\exists$ гладкая $\mathbb{C}$-алгебра R, и $m > 1$

т.ч. $\gcd(m, n) = 1$, и алгебры Адзумаи A, A' над R

т.ч. $\deg A = 2n$, $\deg A' = 2m$, $[A] = [A']$

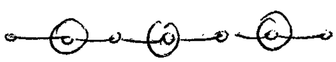
и не существует алг. Адзумаи D т.ч.

$[D] = [A] = [A']$ и $\deg D = 2$



$2n-1$ $\quad$ $2m-1$

// над лок. кольцами бывают только мин. параб. типа



$\alpha \in \Phi_\rho \rightsquigarrow X_\alpha : V \longrightarrow G$

кон. порожд. проект. R-модуль $\qquad \operatorname{rk} V_\alpha = |\pi^{-1}(\alpha)|$

Если G расщепима, то

$$X_\alpha(V_\alpha) = \prod_{a\in\pi^{-1}(\alpha)} x_a(R) \cdot \prod \text{ корневых эл-тов из } x_b(R) : \pi(b) = i\alpha,\ i \geq 2$$

$E_\rho(R) = \langle X_\alpha(V_\alpha), \alpha \in \Phi_\rho \rangle \leq G(R)$

Если $\operatorname{rk} \Phi_\rho \geq 2$, то $E_\rho(R) = E(R) = E_Q(R)$

$\boxed{\text{Теорема 1}}$ Пусть структурные константы Φ обратимы в R (*)
Пусть $H \leq G(R)$ — подгруппа, нормализуемая $E(R)$.
Тогда существует идеал $I \trianglelefteq R$ такой, что

$\forall \alpha \in \Phi_\rho \quad H \cap X_\alpha(V_\alpha) = X_\alpha(I V_\alpha)$

Ожидаем:

Нормальное строение:

$$E(R, I) \leq H \leq G^c(R, I)$$

$E(R,I) = \langle X_\alpha(IV_\alpha) \rangle_{\alpha\in\Phi_\rho}^{E(R)}$

$G^c(R,I)$ = прообраз центра $G(R/I)$ при редукции $\rho_I : G(R) \to G(R/I)$

Комм. формула Шевалле

$$[X_\alpha(u), X_\beta(v)] = \prod_{\substack{i,j>0 \\ i\alpha+j\beta \in \Phi_\rho}} X_{i\alpha+j\beta}(N_{\alpha\beta ij}(u,v))$$

если $k\alpha \neq -m\beta$
$\forall k, m > 0$

Если (*), то $N_{\alpha\beta11} : V_\alpha \times V_\beta \longrightarrow V_{\alpha+\beta}$ сюръективно
билинейно

<u>Обозначение</u> $N_{\alpha_0,\alpha_1}(u_0,u_1) = N_{\alpha_0,\alpha_1,1,1}(u_0,u_1)$

$N_{\alpha_0,\dots,\alpha_n}(u_0,\dots,u_n) = N_{\alpha_0+\dots+\alpha_{n-1}, \alpha_n, 1, 1}(N_{\alpha_0,\dots,\alpha_{n-1}}(u_0,\dots,u_{n-1}), u_n)$

т.е. $[[\dots[X_{\alpha_0}(u_0), X_{\alpha_1}(u_1)], \dots], X_{\alpha_n}(u_n)]$ включает

$X_{\alpha_0+\dots+\alpha_n}(N_{\alpha_0,\dots,\alpha_n}(u_0,\dots,u_n))$

Пусть далее Φ, Φ_ρ неприводимы

$\boxed{\text{Лемма 1}}$ Пусть $\tilde\alpha \in \Phi_P$ — максимальный корень. Тогда $\exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \Phi_P^+$ ($n=3$ или 4) такие, что

① $\tilde\alpha - \alpha_1 - \alpha_2 - \dots - \alpha_i \in \Phi_P$ $\forall\, 1 \le i \le n$, $\tilde\alpha - \alpha_1 - \dots - \alpha_n = -\tilde\alpha$

② $$[[\dots[x_{\tilde\alpha}(u), x_{-\alpha_1}(u_{-1})], \dots], x_{-\alpha_n}(u_{-n})], x_{\alpha_1}(u_1)], \dots, x_{\alpha_n}(u_n)] =$$
$$= x_{\tilde\alpha}(N_{\tilde\alpha, -\alpha_1, \dots, -\alpha_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n}(u, u_{-1}, \dots, u_{-n}, u_1, \dots, u_n))$$
$\forall\, u, u_i, u_{-i}$

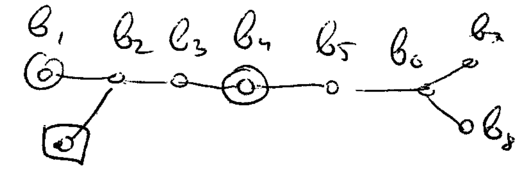
③ $N : V_{-\alpha_1} \otimes \dots \otimes V_{-\alpha_n} \otimes V_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes V_{\alpha_n} \longrightarrow \mathrm{End}_R(V_{\tilde\alpha})$ сюрьективно

Док-во: В расш. диаграмме Дынкина $\hat{D} = D \cup \{-\tilde\alpha\}$ макс. корень

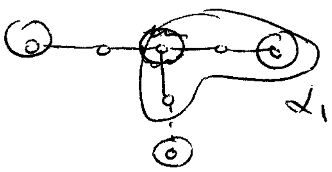
$\alpha_1 = \pi($ сумма корней в цепочке от $(-\tilde\alpha) \in \hat{D}$ до ближайшего корня $b_i \in J)$

$\pi^{-1}(-\tilde\alpha)$

Примеры:



$\to \alpha_1 = \pi(b_1 + b_2)$



Далее:

(a) Если $\tilde\alpha - 2\alpha_1 \notin \Phi_P$, то $\alpha_2 = \tilde\alpha$, $\alpha_3 = \tilde\alpha - \alpha_1$

$$((\tilde\alpha - \alpha_1) - \alpha_2) - \alpha_3 = ((\tilde\alpha - \alpha_1) - \tilde\alpha) - \tilde\alpha + \alpha_1 = -\tilde\alpha$$

простой

$i\tilde\alpha - j\alpha_1 \in \Phi_P \Rightarrow i = 1$ (всегда так для $\tilde\alpha$)
$i, j \ge 1$

(b) $\tilde\alpha - k\alpha_1 \in \Phi_P$, $k \ge 2$ — максимальное такое

$\alpha_1 = \pi$ (цепочки как выше)

$\alpha_2 = (k-1)\alpha_1$ — это будет корнем!

$\alpha_3 = \tilde\alpha - \alpha_1$

$\alpha_4 = \tilde\alpha - (k-1)\alpha_1$

первый шаг:

$i\{\tilde{\alpha}-\alpha_1, \tilde{\alpha}-2\alpha_1, \dots, \tilde{\alpha}-k\alpha_1\}-j(k-1)\alpha_1 = \tilde{\alpha}-k\alpha_1$

Как доказывается сюръективность ~~?~~ N?

можно доказывать на строго плоском покрытии

$\rightarrow$ можно считать, что группа расщепима.

$\exists v(a)\ X_{\tilde{\alpha}}(v(a)) = x_a(1), \quad a \in \pi^{-1}(\tilde{\alpha})$

$\uparrow$

$V_{\tilde{\alpha}}$ $\quad v(a), a\in\pi^{-1}(\tilde{\alpha})$. образуют базис $V_{\tilde{\alpha}}$

Получится $\forall a, b \in \pi^{-1}(\tilde{\alpha})$ найти $\varphi_{ab}: V_{\tilde{\alpha}} \longrightarrow V_{\tilde{\alpha}}$

$\underset{N\dots}{\overset{\varphi_{ab}}{\|}}$

такое, что $\varphi(v(a)) = v(b)$

$\forall a': \ ht(a') \le ht(a) \Rightarrow \varphi_{ab}(v(a')) = 0$

$\underset{a}{\#} \quad ht(a') > ht(a) \Rightarrow_{ht} (\varphi_{ab}(v(a'))) >_{ht} (\varphi_{ab}\, v(a)))$

$\qquad\qquad \varphi_{ab}(v(a)) = v(b)$

Для этого дост. доказать, что $\forall a\in\pi^{-1}(\tilde{\alpha})$

есть $a_i \in \pi^{-1}(\alpha_i)$ такие, что

$a - a_1 - \dots - a_i \in \Phi$ и $a - a_1 - \dots - a_n = -\tilde{a}$

(Тогда $(a - a_1 - \dots - a_n) + b_1 + \dots + b_n = b$)

$ia - ja_1 \in i\tilde{\alpha} - j\alpha_1 \Rightarrow$ это $= \tilde{\alpha} - j\alpha_1$

$\tilde{a} - \tilde{a}_1 - \dots - \tilde{a}_n = -\tilde{a}$

запишем $\quad a = \tilde{a} + \beta_1 + \dots + \beta_k$

$\qquad\qquad \beta_i \in (-\Pi)$

$\tilde{a} = -\tilde{a} + \tilde{a}_n + \dots + \tilde{a}_1$

$+\beta_1$ — корень

$+\beta_2$

$\vdots$

Лемма:

$\alpha+\beta+\gamma = \delta$

$\rightarrow$ хотя бы 2 суммы

$\alpha+\beta, \alpha+\gamma, \beta+\gamma$

— корни

$\rightarrow$ подправляем $\tilde{a}_i$ на β_j

$\rightarrow$ получаем $a = (-\tilde{a} + a_1) + \dots + a_n$.

$\boxed{\text{Следствие}}$ $\underset{=H^{E(R)}}{H} \cap X_{\tilde\alpha}(V_{\tilde\alpha}) = X_{\tilde\alpha}(IV_{\tilde\alpha})$ для некоторого $I \trianglelefteq R$

Док-во $H \cap X_{\tilde\alpha}(V_{\tilde\alpha}) \overset{def}{=} X_{\tilde\alpha}(M_{\tilde\alpha})$ $\quad M_{\tilde\alpha} \subseteq V_{\tilde\alpha}$

① $M_{\tilde\alpha}$ — аддитивная подгруппа: $X_{\tilde\alpha}(u)X_{\tilde\alpha}(v) = X_{\tilde\alpha}(u+v) \in H$

② $N: V_{-\alpha_1} \otimes \dots \otimes V_{-\alpha_n} \otimes V_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes V_{\alpha_n} \longrightarrow End_R(V_{\tilde\alpha})$

Конечно, $N(M_\alpha) \subseteq M_{\tilde\alpha}$ ⇝ $M_{\tilde\alpha}$ — подмодуль

⇝ он имеет вид $IV_{\tilde\alpha}$ ($V_{\tilde\alpha}$ — проект. модуль постоянного ранга)
(т. Морита)

□

$\boxed{\text{Лемма 2}}$ $\forall \alpha \in \Phi_P$ $\underbrace{H \cap X_\alpha(V_\alpha)}_{X_\alpha(M_\alpha)} = X_\alpha(IV_\alpha)$
(I — как выше)

Док-во $M_{\tilde\alpha} = IV_{\tilde\alpha} \Rightarrow M_{-\tilde\alpha} = IV_{-\tilde\alpha}$

индукцией по убыванию высоты γ, $\gamma \in \Phi_P^+$, докажем, что
$\forall \beta \in \pi(\Sigma I) \setminus \{0\}$ т.ч. $\gamma - \beta \in \Phi_P$
если $M_\gamma = IV_\gamma$, то $M_{i\gamma - j\beta} = IV_{i\gamma - j\beta}$ $\forall i, j > 0$

Случай 1: $i = 1$ всегда: $\gamma - j\beta \in \Phi_P$ для какого-то j

Тогда $\gamma - \beta, \gamma - 2\beta, \dots, \gamma - (j-1)\beta \in \Phi_P$ тоже (?!)

→ индукция по убыванию j

$$[[\dots[x_\gamma^{(IV_\gamma)}, x_{-\beta}^{(V_\beta)}], \dots], x_{-\beta}^{(V_{-\beta})}] = X_{\gamma - k\beta}(IV_{\alpha - k\beta})$$

Случай 2: есть $i\gamma - j\beta$

⇝ он получается, может быть, не из $\gamma - \beta$, но

из $i_0\gamma - j_0\beta$, $1 \le i_0 \le i$

прибавлением $\gamma, \dots, \gamma, \beta, \dots, \beta$. — в каком-то порядке

$ht(i_0\gamma) > ht(\gamma)$

Как доказывается ф-ла Шевалле?

$[X_\gamma(V_\gamma), X_{-\beta}(V_{-\beta})]$

// Запишем на покрытии, все расщепится

$\prod_{a \in \pi^{-1}(\gamma)} x_a \cdot \prod_{a_i \in \pi^{-1}(i\gamma)} x_{a_i}$:

Тут мы показали, что $M_\alpha \supseteq IV_\alpha$ $\forall \alpha \in \Phi_P$

Пусть $M_{\alpha_0} \not\subseteq IV_{\alpha_0}$ ($\alpha_0 \in \Phi_P^+$) ⇝ R/I

⇝ $M_{\tilde\alpha} = 0$, $M_{\alpha_0} \ni v_0 \neq 0$ ⇝ ∃ цепочка $\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n = \tilde\alpha$

т.ч. $\alpha_i \in \Phi_P^+$, $\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_i \in \Phi_P$ ⇝ прокинуть пару раз

⇝ получим $N_{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n}(v_0, e_1, \dots, e_n) \neq 0 \in M_{\tilde\alpha}$ ($\exists e_1, \dots, e_n$: см. статью Ставрова–Куликова)

$\boxed{\text{Теорема 2}}$ G односвязна, $P \leq G$, $\mathrm{rk}\,\Phi \geq 2$, R нетерово, (*). Тогда $\mathrm{Ker}\left(\widehat{E(R)} \longrightarrow \overline{E(R)}\right)$ центрально

$$\widehat{E(R)} = \varprojlim_{\substack{H \trianglelefteq E(R) \\ |E(R)/H| < \infty}} E(R)/H \qquad \overline{E(R)} = \varprojlim_{\substack{I \trianglelefteq R \\ |R/I| < \infty}} E(R)/E^*(R,I)$$

$$\left(E^*(R,I) = \mathrm{Ker}\left(E(R) \longrightarrow E(R/I)\right)\right)$$

Осн. часть доказательства происходит над $\widehat{R}_m$, где $m \trianglelefteq R$, $|R/m| < \infty$

$\longrightarrow H^1(\widehat{R}_m, G_0) = H^1(\widehat{R}_m/m, G_0)$

$\Rightarrow G(\widehat{R}_m)$ квази-расщеплима.

(+ теорема 1)