25.06.2013

Congruence kernel

А. Ставрова

1964 Басс – Лазар – Серр ; Менникe:

$n \geq 3 \rightsquigarrow$ любая подгруппа конечного индекса в $SL(n,\mathbb{Z})$ содержит конгруэнц-подгруппу $SL_n(\mathbb{Z},(a))$

зачем? унитарные представления всегда пропускаются через подгр. кон. индекса

1967 Басс – Милнор – Серр (SL_n, Sp_{2n})

1968 Мацумото

$\longrightarrow$ G – группа Шевалле над $\mathcal{O}$

$\mathcal{O}$ – кольцо целых поля алг. чисел K

$\mathcal{O}_S$ S – набор нормирований неархимедовых

$\mathcal{O}_S = \{x \mid v(x) \geq 0 \ \forall v \in S\}$

Вопрос: верно ли, что $\forall$ подгруппа кон. индекса в $G(\mathcal{O})$ содержит конгруэнц-подгруппу $G(\mathcal{O}, I)$?

(для ранга 1 известно, что это неверно)

Можно спросить про $\Gamma \leq G(\mathcal{O})$ тот же вопрос, с конгруэнц-подгруппой $\Gamma \cap G(\mathcal{O}, I)$.

Вопрос': K – глобальное поле, G – простая алг. группа над K, $\Gamma \leq G(\mathcal{O}_S) \overset{def}{=\!=} G(K) \cap GL_n(\mathcal{O}_S)$ для какого-то представления $G \longrightarrow GL_n$ (точного)

- для таких полей $G(K) = E(K)$, если G изотропна и односвязна
- все идеалы $I \trianglelefteq \mathcal{O}_S$ имеют конечный индекс

$$\hat{\Gamma} = \varprojlim_{\substack{H \trianglelefteq \Gamma \\ |\Gamma/H| < \infty}} \Gamma/H \qquad \bar{\Gamma} = \varprojlim_{\substack{I \trianglelefteq \mathcal{O}_S \\ |\mathcal{O}_S/I| < \infty}} \Gamma/\Gamma \cap G(\mathcal{O}, I)$$

проконечная топология — конгруэнц-топология

Вопрос'': что можно сказать о $C\Gamma = \ker(\rho : \hat{\Gamma} \longrightarrow \bar{\Gamma})$?

1967, 1968 $\longrightarrow$ это ядро конечно и центрально для групп Шевалле $G(\mathcal{O}_S)$, $rk\, G \geq 2$

1986 M.S. Raghunathan; K – глоб. поле, $G/\mathcal{O}_S$ – односв. простая изотропная группа т.е. $irk(G) \geq 1$

т.ч. $\sum_{v \in S} irk(G_{K_v}) \geq 2$ (изотропный ранг)

Тогда $\ker(\rho)$ конечно и центрально

2006 Kassabov, Nikolov

$n \geq 3$, $\Gamma = SL_n(\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m])$

$\rightsquigarrow$ СП центрально (но не конечно)

2011 A. Rapinchuk, I. Rapinchuk

G – группа Шевалле, $rk\, G \geq 2$

R – нётерово кольцо + обратимы константы какие-то

$\rightsquigarrow$ $CE(R)$ центрально в $\widehat{E(R)}$

$\boxed{\text{Теорема}}\ \boxed{0}$ G – односвязная простая алгебраическая группа над нётеровым кольцом R такая, что

- $irk(G) \geq 1$
- $irk(G_{R_{\mathfrak{m}}}) \geq 2 \quad \forall \mathfrak{m} \in Max(R)$
- стр. константы абсолютной системы корней G обратимы в R

Тогда $CE(R)$ центрально в $\widehat{E(R)}$

$\boxed{\text{Теорема}}\ \boxed{1}$ В тех же предположениях

если $H \leq G(R)$ – подгруппа, нормализуемая $E(R)$, то $\exists I \trianglelefteq R$:

$\forall \underset{\text{– парабол.}}{P \leq G} \quad \forall \alpha \in \Phi_P \quad H \cap X_\alpha(V_\alpha) = X_\alpha(IV_\alpha)$

$\underset{\shortparallel}{E_P(R)}\ \forall P$

$\underline{\text{Д-во}}$ Теоремы 0 (набросок)

(I) $\overline{E(R)} \cong E(\hat{R}) \qquad \hat{R} \cong \prod\limits_{\mathfrak{m} \in Max(R)} \hat{R}_{\mathfrak{m}}$

$\underline{\text{кон. индекса}}$

$\lim\limits_{\substack{I \trianglelefteq R \\ |R/I| < \infty}} R/I$

(II) Из Теоремы 1 топологии совпадают на всех $\underset{\alpha \in \Phi_P}{X_\alpha(V_\alpha)}$

$$\widehat{E(R)} \supseteq \widehat{X_\alpha(V_\alpha)} \overset{\rho_\alpha}{\cong} \underbrace{X_\alpha(V_\alpha \otimes_R \hat{R})} \subseteq E(\hat{R}) = \overline{E(R)}$$

$$\cong \prod_{\mathfrak{m} \in Max(R)} X_\alpha(V_\alpha \otimes_R \hat{R}_{\mathfrak{m}})$$

Далее: подгруппа, порожд. ими точна, накрывается St, и можно использовать центральность ядра K_2

$$\Gamma_{\mathfrak{m}} = \langle \rho_\alpha^{-1}(X_\alpha(V_\alpha \otimes_R \hat{R}_{\mathfrak{m}})), \alpha \in \Phi_P \rangle$$

где $\rho_\alpha = \rho|_{\widehat{X_\alpha(V_\alpha)}}$

По топологическим причинам + огр. порождённость $E(\widehat{R_m})$ элементами $X_\alpha(\widehat{R}_m)$ (разложение Гаусса): $\widehat{R}_m$ локально + $G\widehat{R}_m$ квази-расщепима по т. Ленга)

$\operatorname{Ker} \rho|_{\Gamma_m}$ центрально в Γ_m $\forall m \in \mathrm{Max}_0(R)$

$\rightsquigarrow \operatorname{Ker}(\rho : \widehat{E(R)} \longrightarrow \overline{E(R)})$ центрально

Стейнберга группа

<u>Def</u> R связное комм. кольцо, G/R изотропна, $P \leq G$ — парабол.

$$St_P(R) = \langle \widetilde{X}_\alpha(v),\ \alpha \in \Phi_P,\ v \in V_\alpha \rangle \big/ (R1), (R2)$$

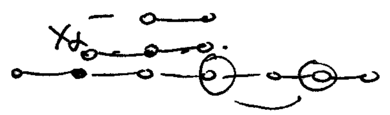
(R1): $\widetilde{X}_\alpha(v)\, \widetilde{X}_\alpha(w) = \widetilde{X}_\alpha(v+w) \prod\limits_{i \geq 2} \widetilde{X}_{i\alpha}(q^i_\alpha(v,w))$

(R2): $[\widetilde{X}_\alpha(v), \widetilde{X}_\beta(w)] = \prod \widetilde{X}_{i\alpha+j\beta}(\ldots)$

- $S_P : St_P(R) \twoheadrightarrow E_P(R) = \langle X_\alpha(v) \mid \alpha \in \Phi_P, v \in V_\alpha \rangle$
- $St_P(-)$ — функтор
- Q — другая параболическая $\quad Q < P < G$

$\rightsquigarrow \pi_{PQ} : \Phi_Q \twoheadrightarrow \Phi_P \cup \{0\}$

$\varphi_{PQ} : St_P(R) \twoheadrightarrow St_Q(R)$ — неизвестно, когда это изоморфизм



Q — борелевская

P

$\forall$ корневой из L_P = пр-ние

<u>Def</u> $\widetilde{T}_P(R) = \langle \widetilde{h} \in St_P(R) \mid \widetilde{h} \in \widetilde{E}_\alpha(R)$ для некот. $\alpha \in \Phi_P$, и $S_P(\widetilde{h}) \in L_P(R) \rangle$

где $\widetilde{E}_\alpha(R) = \langle \widetilde{X}_{i\alpha}(V_{i\alpha}), i \in \mathbb{Z} \setminus 0 \rangle$

<u>Def</u> $\widetilde{T}_P(I) = \langle \widetilde{h} \mid \widetilde{h} \in \widetilde{U}_{(\alpha)}(I)\, \widetilde{U}_{(-\alpha)}(R)\, \widetilde{U}_{(\alpha)}(I)\, \widetilde{U}_{(-\alpha)}(R),\ S_P(\widetilde{h}) \in L_P(R) \rangle$

где $U_{(\alpha)}(R)$, $U_{(-\alpha)}(R)$ — полож. и отр. части: $\langle \widetilde{X}_{i\alpha}(V_{i\alpha}), i > 0\ (i < 0) \rangle$

где $I \trianglelefteq R$ — макс. идеал, R локально.

Лемма $\forall \hat h \in \widetilde{L}_P(R)$ имеет место

$$\hat h \cdot \widetilde{X}_\alpha(v) \cdot \hat h^{-1} = \left(S_P|_{\widetilde{U}(\alpha)}\right)^{-1}\left(h X_\alpha(v) h^{-1}\right), \text{ где}$$

$\operatorname{rk}\Phi_P \geq 2$ $\qquad h = S_P(\hat h) \in L_P(R) \quad \forall \alpha \in \Phi_P$

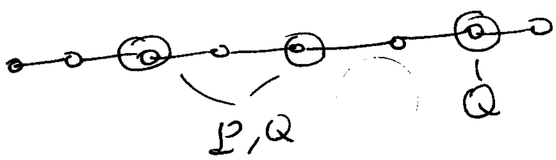
Утв. $Q \leq P \leq G$ — две параболические

Тогда $\operatorname{Ker}(\varphi_{PQ} : St_P(R) \longrightarrow St_Q(R))$ центрально и лежит в $\widetilde{L}_P(R)$. Кроме того, $\varphi_{PQ}^{-1}(\widetilde{L}_Q(R)) = \widetilde{L}_P(R)$

<u>Док-во</u>

$$\begin{tikzcd} St_P(R) \arrow[r, "\varphi_{PQ}"] \arrow[d, "S_P"'] & St_Q(R) \arrow[dl, "S_Q"] \\ E_P(R) = E_Q(R) & \end{tikzcd}$$

дост. д-ть, что $\forall x \in \operatorname{Ker}\varphi_{PQ}$ $x \in \widetilde{L}_P(R)$



$\square$

Теорема 2 R — лок. кольцо, G — простая (односв.) изотропная группа, $P \leq G$ — парабол., $\operatorname{rk}\Phi_P \geq 2$. Тогда

$\operatorname{Ker}(St_P(R) \xrightarrow{S_P} E(R))$ центрально

<u>Док-во</u> V. Deodhar: R — поле
(1978)

Более того $R \longrightarrow R/m = k$

$\operatorname{Ker}(S_Q : St_Q(k) \longrightarrow E(k))$ центрально

где $Q \subseteq G_k$ — мин. параболическая над k

$$\begin{tikzcd} St_P(R) \arrow[r] \arrow[d, "S_P(R)"] & St_P(k) \arrow[r] \arrow[d, "S_P(k)"] & St_Q(k) \arrow[d, "S_Q"] \\ E_P(R) \arrow[r] & E_P(k) = & E_Q(k) \end{tikzcd}$$

ядро центрально, значит его образующие лежит в $\widetilde{L}_Q(k)$

По крайней мере, мы знаем, что $\ker S_P(k) \subseteq \tilde{T}_P(k)$

Имеем $\tilde{T}_P(R) \xrightarrow{(*)} \tilde{T}_P(k)$ (по Утв.) (очевидно)

$\boxed{\text{Лемма}}$ $\ker\left(St_P(A) \longrightarrow St_P(A/J)\right) = \hat{E}(A, J)$

$$\hat{E}(A,J) = \hat{E}(J)^{St_P(A)}$$

(**) У нас $\hat{E}(R, I) \subseteq \tilde{U}_P(I)\,\tilde{T}_P(\cancel{k}\, I)\,\tilde{U}_{P^-}(I)$

$$\hat{E}(R,I) = \langle \tilde{Z}_\alpha(a, v) \mid \alpha \in \Phi_P \rangle, \quad a \in E_\alpha(R),\ v \in IV_\alpha$$

по комм. формуле Шевалле

Тогда $\ker S_P(R) \leqslant \tilde{L}_P(R) \cdot \tilde{U}_P(I)\,\tilde{T}_P(I)\,\tilde{U}_{P^-}(I)$

$$= \tilde{U}_P(I)\,\tilde{L}_P(R)\,\tilde{U}_{P^-}(I)$$

$$\Big\downarrow S_P \qquad \text{— большая клетка}$$

$$U_P(I)\,L_P(R)\,U_{P^-}(I)$$

$\to \ker S_P(R) \subseteq \tilde{T}_P(R)$ — по однозначности разлож.

$\to \ker S_P(R)$ центрально $\square$

$\boxed{\text{Лемма}}$ $\hat{E}(R, I) \subseteq \tilde{U}_P(I)\,\hat{L}_P(I)\,\tilde{U}_{P^-}(I)$

$$E(\hat{R}) \supseteq \Gamma_m = \langle \rho_\alpha^{-1}\left(X_\alpha(V_\alpha \otimes_R \hat{R}_m)\right),\ \alpha \in \Phi_P \rangle$$

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_m & \longrightarrow & E(\hat{R}_m) \\ \downarrow & \swarrow & \\ \overline{E(R)} = E(\prod \hat{R}_m) & & \end{array}$$

его ядро центрально:

$$\begin{array}{ccc} & & St_P(\hat{R}_m) \\ & \swarrow & \downarrow \\ \Gamma_m & \xrightarrow{\rho_\alpha} & E(\hat{R}_m) \end{array}$$

порождается $\rho_\alpha^{-1}(\text{--})$, и соотношения (R1), (R2) выполнены в силу непрерывности полиномиальных отображений в конгруэнц-топологии (они верны для исходных $X_\alpha(V_\alpha)$)

$\Rightarrow \ker \rho_\alpha$ центрально

В пред. работе: (J. K-Theory, 2013)

Теорема R — лок. кольцо

G — изотропная группа относ. ранга ≥ 2

Тогда $E(R[x,x^{-1}]) = E(R[x])E(R[x^{-1}])E(R[x])$

$$w_\alpha(x) = x_\alpha(x)\,x_{-\alpha}(-x^{-1})\,x_\alpha(x)$$

Еще: $E(R((x))) = E(R[x,x^{-1}])E(R[[x]])$

ряды Лорана

R — любое комм. кольцо

Обе: $E(R[x,x^{-1}]) = E(R[x])\cdot B(R[x,x^{-1}])$

на самом деле: $= E(R[x]) \underset{B(R[x])}{*} B(R[x,x^{-1}])$ — в ранге 1 хотя бы

Nagao (Serre, SL_2)

Cohn (SL_n)

Гипотеза:

R — dvr. $\rightsquigarrow$ $G(R[x]) = G(R)\,E(R[x])$

Маргеаux — для поля

$$K_1^G(-) = G(-)/E(-)$$

$$NK_1^G(R) = \operatorname{Ker}(K_1^G(R[x]) \longrightarrow K_1^G(R))$$

$$x \longmapsto 0$$

отделимый предпучок в Zar: — на афф. схемах

$$NK_1(R) \hookrightarrow \prod_{m\in Max(R)} NK_1^G(R_m)$$

— для K_1 это неверно: для односвязных групп Шевалле правая часть равна 1

не отделимый предпучок!

R — dvr, $\mathfrak{p}$ — max идеал в R, $k = Q(R)$

$$B = \begin{pmatrix} R & & R \\ & \ddots & \\ \mathfrak{p} & & R \end{pmatrix}$$ — подгруппа Ивахори

$\to G(k) = B \cdot \widetilde{W} \cdot B$ — разложение Ивахори

$\widetilde{W}$ — аффинная группа Вейля G