Нестабильный K_1-функтор для multiloop groups: апдейт.

Анастасия Ставрова

12.06.2014

1 Введение

Неформально говоря, multiloop group — это редуктивная группа над $R = k[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]$. Цель: «описать» $K_1^{G,P}(R) = G(R)/E_P(R)$, где $E_P(R) = U_P(R), U_{P^-}(R)$. Почему именно такое R? Во-первых, это кольцо близко к обычному кольцу многочленов. Во-вторых, ожидается следующее приложение.

Терминология: Lie torus = $\mathbb{Z}^n \times \Delta$-градуированная алгебра Ли (вообще говоря, бесконечномерная), где Δ — обычная система корней (в смысле Бурбаки). Иными словами, $\mathcal{L} = \bigoplus_{(\alpha,\lambda)\in\Delta\times\mathbb{Z}^n} \mathcal{L}_\alpha^\lambda$ (и какие-то аксиомы). При этом Lie tori = centerless cores для EALAs (= extended affine Lie algebras) — это анонсированный результат E. Neher. Если $n = 1$, получаем centerless cores для аффинных алгебр Каца–Муди. Allison, Berman, Faulkner, Pianzola показали, что Lie tori — это [почти всегда] простонапросто скрученные формы простых расщепимых алгебр Ли над $R = k[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]$. Группа G автоморфизмов такого объекта — присоединенная простая алгебраическая группа над R. Тогда K_1^G измеряет отклонение всей группы автоморфизмов от подгруппы экспоненциальных автоморфизмов. Изотропный ранг G при этом равен рангу Δ.

Пусть k — поле характеристики 0, G — редуктивная группа над $R = k[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]$, и $\operatorname{rk} G \geq 2$ (в сильном смысле). Тогда $E_P(R) = E(R)$ для любой параболической P (определенной над R), которая собственным образом пересекает все полупростые нормальные подгруппы.

Когда G определена уже над основным полем k, все более-менее известно.

Теорема 1 (Ставрова, K-Theory)**.** *Пусть G — полупростая односвязная группа над k, P определена над k. Тогда $K_1^G(R) = K_1^G(k)$*

Теорема 2 (Ставрова)**.** *Пусть A — коммутативное кольцо с 1, G — редуктивная группа над A с изотропным рангом хотя бы 2, тогда*

$$E(A((t))) = E(A[[t]]) \cdot E(A[t, t^{-1}]).$$

(здесь $A((t))$ — кольцо степенных рядов Лорана над A).

Следствие 3. *Если $K_1^G(A[t]) = K_1^G(A)$, то $K_1^G(A[t, t^{-1}]) \hookrightarrow K_1^G(A((t)))$.*

Если $A = k$ — поле, то условие следствия выполнено. Если, более того, G полупроста, то $K_1^G(k[t, t^{-1}]) = K_1^G(k((t)))$.

Вопрос: как соотносятся $K_1^G(k[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}])$ и $K_1^G(k((x_1)) \dots ((x_n)))$? Нас интересует случай, когда G определена над кольцом $k[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$, а не над k. Мы докажем следующую теорему.

Теорема 4. *Пусть k — поле характеристики 0. Предположим, что k содержит корни из 1 всех степеней. Пусть G — редуктивная группа над $R = k[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ такая, что G содержит R-тор ранга, равного рангу G над алгебраически замкнутым полем (будем говорить в таком случае, что g* содержит R-тор максимального ранга*, и ранг G хотя бы 2. Тогда $K_1^G(k[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]) \hookrightarrow K_1^G(k((x_1)) \dots ((x_n)))$.*

Ранее была известна следующая теорема:

Теорема 5 (Chernousov, Gille, Pianzola)**.** *Пусть k — поле характеристики 0, G полупростая над R, содержащая R-тор максимального ранга. Тогда*

$$K_1^{G,P}(k[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]) \twoheadrightarrow K_1^{G,P}(k((x_1)) \dots ((x_n))).$$

2 Этальная фундаментальная группа

Пусть X — связная нетерова схема над полем k. Фиксируем геометрическую точку этой схемы $a\colon \mathrm{Spec}(\overline{k}) \to X$. Рассмотрим категорию FEt_X (подкатегорию в категории схем над X), объекты которой — конечные этальные морфизмы $f\colon Y \to X$. Рассмотрим функтор $F\colon FEt_X \to \mathfrak{Sets}$, сопоставляющий схеме Y множество $\overline{k}$-точек Y *над* a, то есть, таких точек $a'\colon \mathrm{Spec}(\overline{k}) \to Y$, для которых диаграмма

$$\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[d, "f"] \\
\mathrm{Spec}(\overline{k}) \arrow[ur, "a'"] \arrow[r, "a"'] & X
\end{tikzcd}$$

коммутативна. Определим $\pi_1(X,a) = \mathrm{Aut}(F)$ — множество естественных преобразований $F \to F$. Очевидно, что $\pi_1(X,a)$ является группой относительно композиции.

Пусть $(X_i)_{i\in I}$ — все связные накрытия Галуа X. Тогда существует схема $X^{sc} = \varprojlim_i X_i$, и при этом $\mathrm{Aut}(F) = \mathrm{Aut}_X(X^{sc})$. Получаем, что $\pi_1(X,a) = \varprojlim_{i\in I} \mathrm{Aut}_X(X_i)$, где все $\mathrm{Aut}_X(X_i)$ — конечные группы. Стало быть, $\pi_1(X,a)$ — проконечная группа.

Предложение 6 (Gille, Pianzola)**.** *Если G — локально конечно представимая групповая схема над X, то существует биекция*

$$\varinjlim_i H^1(\mathrm{Aut}_X(X_i), G(X_i)) \cong H^1(\pi_1(X,a), G(X^{sc})).$$

Пусть схема X над k геометрически связна, $\overline{X} := X \times_k \overline{k}$. Рассмотрим каноническое отображение $a_0\colon \mathrm{Spec}(\overline{k}) \xrightarrow{\overline{a}} \overline{X} \to X \to \mathrm{Spec}(k)$, где композиция $\mathrm{Spec}(\overline{k}) \xrightarrow{\overline{a}} \overline{X} \to X$ совпадает с a (то есть, точка $\overline{a}$ лежит над a).

Тогда есть точная последовательность

$$1 \to \pi_1(\overline{X}, \overline{a}) \to \pi_1(X,a) \to \pi_1(k, a_0) \to 1$$

При этом $\pi_1(k,a_0) = \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$.

Если у X есть рациональная точка $b\colon \mathrm{Spec}(k) \to X$ такая, что $b \circ a_0 = a$, то $\pi_1(X,a) = \pi_1(\overline{X},\overline{a}) \rtimes \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$.

3 Многочлены Лорана

Мы будем обозначать через $\mathrm{Gal}(k)$ абсолютную группу Галуа $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$. Положим теперь $X = \mathrm{Spec}\, k[x^{\pm 1}]$; тогда $\pi_1(X,1) = \hat{\mathbb{Z}}(1) \rtimes \mathrm{Gal}(k)$. Здесь $\hat{\mathbb{Z}}(1)$ обозначает группу $\varprojlim \mu_m(\overline{k})$ с естественным действием группы Галуа (если забыть про действие группы Галуа, то группа $\hat{\mathbb{Z}}(1)$ изоморфна $\hat{\mathbb{Z}} = \varprojlim(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$). Для $X = \mathrm{Spec}\, k[x^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ ответ такой: $\pi_1(X,1) = (\hat{\mathbb{Z}}(1))^n \rtimes \mathrm{Gal}(k)$. Для простоты в дальнейших рассуждениях мы будем часто предполагать, что $n = 1$.

Накрытия Галуа имеют вид $l[x^{\pm 1/d}] \leftarrow k[x^{\pm 1}]$, где l/k — расширение Галуа, и $\mu_d(\overline{k}) \subseteq l$. Группа Галуа этого накрытия равна $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \rtimes \mathrm{Gal}(l/k)$, и $\overline{n} \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ действует так: $\overline{n} \cdot x^{1/d} = (\zeta_d)^n \cdot x^{1/d}$, где $\zeta_d \in \mu_d(\overline{k})$ — примитивный корень из 1. Для нескольких переменных все аналогично с $l[x^{\pm 1/d_1}, \dots, x_n^{\pm 1/d_n}]$, и каждое $\mathbb{Z}/d_i\mathbb{Z}$ действует на своей переменной x_i^{1/d_i}.

Определение 7. $\xi \in H^1_{\acute{e}t}(X, G)$ *называется loop cocycle, если ξ лежит в образе отображения*

$$H^1(\pi_1(X,a), G(\overline{k})) \to H^1(\pi_1(X,a), G(X^{sc})) \subseteq H^1_{\acute{e}t}(X, G).$$

Пусть теперь $X = \mathrm{Spec}(k[x_1^{\pm1}, \ldots, x_n^{\pm1}])$. Если H — редуктивная группа над X, соответствующая коциклу из $H^1_{\acute{e}t}(X, \mathrm{Aut}(H_0))$ (где H_0 — расщепимая форма H), то H всегда расщепляется над некоторым конечным накрытием Галуа (Gille, Pianzola, 2008). Иначе говоря, $H^1_{\acute{e}t}(X, \mathrm{Aut}(H_0)) = H^1(\pi_1(X,a), H(X^{sc}))$. В нашем случае $X^{sc} = \mathrm{Spec}(\overline{k}[x_1^{\pm1/\infty}, \ldots, x_n^{\pm1/\infty}]) = \mathrm{Spec}(\bigcup_{d_i \geq 1} \overline{k}[x_1^{\pm1/d_1}, \ldots, x_n^{\pm1/d_n}])$.

Определение 8. *H называется loop reductive group, если H задается loop-коциклом.*

Теорема 9 (Gille, Pianzola)**.** *Группа G над $R = k[x_1^{\pm1}, \ldots, x_n^{\pm1}]$ является loop reductive тогда и только тогда, когда G содержит R-тор максимального ранга.*

Для доказательства теоремы 4 нам понадобятся две леммы. Сначала — аналог классической inflation-restriction exact sequence.

Лемма 10. *Пусть G — проконечная группа, A — дискретная G-группа, $H \trianglelefteq G$ — нормальная замкнутая подгруппа. Тогда имеется точная последовательность*

$$* \to H^1(G/H, A^H) \to H^1(G, A) \overset{res}{\to} H^1(H, A).$$

Лемма 11 (Diagonal argument)**.** *Пусть k — поле характеристики 0, содержащее все корни из 1, G — loop reductive группа над $k[x^{\pm1}]$. Рассмотрим два вложения*

$$\begin{aligned} k[x^{\pm1}] &\to k[z^{\pm1}, w^{\pm1}] \\ f_z &\colon x \mapsto z \\ f_w &\colon x \mapsto w. \end{aligned}$$

Обозначим $R' = k[z^{\pm1}, (zw^{-1})^{\pm1/d}] = k[w^{\pm1}, (zw^{-1})^{\pm1/d}]$ и рассмотрим естественное отображение $k[z^{\pm1}, w^{\pm1}] \to R'$. Обозначим через $f_{z,d}$ и $f_{w,d}$ полученные композиции:

$$\begin{tikzcd}
k[x^{\pm1}] \arrow[dr, "f_z"'] \arrow[drr, "f_{z,d}"] & & \\
& k[z^{\pm1}, w^{\pm1}] \arrow[r, two heads] & R' \\
k[x^{\pm1}] \arrow[ur, "f_w"] \arrow[urr, "f_{w,d}"'] & &
\end{tikzcd}$$

Тогда существует $d > 0$ *такое, что* $f_{z,d}^*(G) \cong f_{w,d}^*(G)$ *как* R'*-группы.*

Доказательство. Группа G задается коциклом из $H^1(\hat{\mathbb{Z}}(1) \rtimes \Gamma, A_0(\overline{k}))$, где $\Gamma = \mathrm{Gal}(k)$, $A_0 = \mathrm{Aut}(G_0)$. Положим $G_1 = (f_z)^*(G)$, $G_2 = (f_w)^*(G)$. Эти группы задаются коциклами $\xi_z, \xi_w \in H^1((\hat{\mathbb{Z}}(1) \times \hat{\mathbb{Z}}(1)) \rtimes \Gamma, A_0(\overline{k})$, соответственно.

Применим сдвиг отмеченной точки (см. Серр, *Когомологии Галуа*); тогда G_2 соответствует коциклу $\xi \in H^1((\hat{\mathbb{Z}}(1) \times \hat{\mathbb{Z}}(1)) \rtimes \Gamma, A_1(\overline{k}))$, где $A_1 = \mathrm{Aut}(G_1)$.

Обозначим $Y = \mathrm{Spec}(k[z^{\pm 1}, w^{\pm 1}]) \cong \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m$. В ней есть подсхема $i\colon \Delta \hookrightarrow Y$ («диагональ»). Тогда $G_1|_\Delta \cong G_2|_\Delta$ как Δ-группы. При этом i соответствует гомоморфизму колец $k[z^{\pm 1}, w^{\pm 1}] \twoheadrightarrow k[u^{\pm 1}]$, $z \mapsto u$, $w \mapsto u$.

В терминах коциклов это означает, что образ ξ под действием i^* в множестве $H^1(\hat{\mathbb{Z}}(1) \rtimes \Gamma, A_1(\overline{k}))$ тривиален. Имеется и отображение в обратную сторону: для этого разложим $\hat{\mathbb{Z}}(1) \times \hat{\mathbb{Z}}(1)$ на «диагональ» и «антидиагональ»:

$$\underset{z}{\hat{\mathbb{Z}}(1)} \times \underset{w}{\hat{\mathbb{Z}}(1)} \cong \underset{u}{\hat{\mathbb{Z}}(1)} \times \underset{zw^{-1}}{\hat{\mathbb{Z}}(1)}$$

Рассмотрим точную последовательность из леммы 10:

$$H^1(\hat{\mathbb{Z}}(1) \rtimes \Gamma, A_1(\overline{k})) \overset{\mathrm{inf}}{\to} H^1((\underset{u}{\hat{\mathbb{Z}}(1)} \times \underset{zw^{-1}}{\hat{\mathbb{Z}}(1)}) \rtimes \Gamma, A_1(\overline{k})) \to H^1(\underset{zw^{-1}}{\hat{\mathbb{Z}}(1)}, A_1(\overline{k})),$$

где правый морфизм соответствует ограничению на второй сомножитель. Образ ξ справа обозначим через η. Коцикл η расщепляется после некоторой замены базы $k[(zw^{-1})^{\pm 1}] \to k[(zw^{-1})^{\pm 1/d}]$. Совершим ту же замену базы в остальных членах нашей последовательности:

$$\begin{tikzcd}
H^1(\hat{\mathbb{Z}}(1) \rtimes \Gamma, A_1(\overline{k})) \arrow[r, shift left, "\mathrm{inf}"] \arrow[d] & H^1((\underset{u}{\hat{\mathbb{Z}}(1)} \times \underset{zw^{-1}}{\hat{\mathbb{Z}}(1)}) \rtimes \Gamma, A_1(\overline{k})) \arrow[l, shift left, "i^*"] \arrow[r] \arrow[d] & H^1(\underset{zw^{-1}}{\hat{\mathbb{Z}}(1)}, A_1(\overline{k})) \arrow[d] \\
H^1(\hat{\mathbb{Z}}(1) \rtimes \Gamma, A_1(\overline{k})) \arrow[r] & H^1((\underset{u}{\hat{\mathbb{Z}}(1)} \times \underset{(zw^{-1})^{1/d}}{\hat{\mathbb{Z}}(1)}) \rtimes \Gamma, A_1(\overline{k})) \arrow[r] & H^1(\underset{(zw^{-1})^{1/d}}{\hat{\mathbb{Z}}(1)}, A_1(\overline{k}))
\end{tikzcd}$$

Заметим, что с первым членом при замене базы ничего не происходит: левая вертикальная стрелка является изоморфизмом. Мы знаем, что коцикл ξ в правом нижнем углу становится тривиальным; поэтому он приходит из левого нижнего угла. Значит, $\xi = \mathrm{inf}(\xi')$ для некоторого ξ' из левого верхнего угла; в то же время, $i^* \circ \mathrm{inf} = \mathrm{id}$, поэтому $\xi' = i^*(\mathrm{inf}(\xi')) = i^*(\xi)$, а выше мы заметили, что коцикл $i^*(\xi)$ тривиален. Поэтому и $\xi = \mathrm{inf}(\xi')$ тривиален. $\square$

Доказательство теоремы 4. Мы смотрим на $K_1^G(k[x^{\pm 1}] \to K_1^G(k((x)))$. Есть два отображения $f_{z,d}^*, f_{w,d}^*\colon K_1^G(k[x^{\pm 1}] \to K_1^{G_1}(k[z^{\pm 1}, (zw^{\pm 1})^{\pm 1/d}]) = K_1^{G_2}(k[w^{\pm 1}, (zw^{\pm 1})^{\pm 1/d}])$. Обозначим $t = (zw^{-1})^{1/d}$.

$$\begin{tikzcd}
K_1^G(k[x^{\pm 1}]) \arrow[rr] \arrow[d, shift right, "f_{z,d}^*"'] \arrow[d, shift left, "f_{w,d}^*"] & & K_1^G(k((x))) \arrow[d] \\
K_1^{G_1}(k[z^{\pm 1}, (zw^{\pm 1})^{\pm 1/d}]) \arrow[rr] & & K_1^{G_1}(k[w^{\pm 1}]((t)))
\end{tikzcd}$$

Нижняя горизонтальная стрелка инъективна по следствию 3, примененному к группе G_2 и $A = k[w^{\pm 1}]$. Левая вертикальная стрелка также инъективна, так как имеется ретракция $z \mapsto x$, $t \mapsto 1$. Поэтому и верхняя горизонтальная стрелка инъективна. $\square$