Слабые трансферы для шифификации нестабильных K_1-функторов классического типа

Анастасия Ставрова

03.09.2014

1

Определение 1. *Пусть R — коммутативное кольцо, G/R — аффинная гладкая групповая схема. Группа G редуктивна (простая, полупростая) тогда и только тогда, когда $G_{\overline{k(x)}}$ редуктивна (проста,полупроста) в обычном смысле для каждого $x \in \operatorname{Spec} R$.*

Определение 2. *Будем говорить, что изотропный ранг группы G не превосходит k ($\operatorname{irk}(G) \geq k$) тогда и только тогда, когда найдутся параболические подгруппы $P_1 < P_2 < P_3 < \cdots < P_k \leq G$.*

Определение 3. *Параболическая подгруппа $P \leq G$ называется строго собственной, если P пересекает собственным образом любую полупростую нормальную подгруппу в G.*

Определение 4. *Пусть X — произвольная схема. Обозначим $E_P(X) = \langle U_P(X), U_{P^-}(X) \rangle$, если P, P' — две противоположные параболические X-подгруппы в G/X. Если $X = \operatorname{Spec}(R)$ — аффинная схема, то эта вещь не зависит от выбора P^-. Вообще говоря, E_P не является пучком.*

Определение 5. $K_1^{G,P,P^-}(X) = G(X)/E_{P,P^-(X)}$. *Если X аффинна, то можно писать $K_1^{G,P}$.*

Замечание: шифификация — точный функтор.

Лемма 6. *Пусть R — гладкая k-алгебра, где k — поле; G/R — редуктивная группа, $P \leq G$ — строго собственная параболическая подгруппа, P^- — некоторая противоположная. Тогда $K_{1,\mathrm{Nis}}^{G,P,P^-}$ — функтор из категории Sm_R гладких схем над R в категорию множеств. Этот функтор*

1. *принимает значения в категории групп;*

2. *не зависит от P, P^-.*

Напомним, что покрытия Нисневича порождаются элементарными квадратами, то есть, покрытиями вида

$$\begin{tikzcd} Y \times_X U \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ U \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

Доказательство. Рассмотрим отображения $E_1 = E_{P,P^-,Nis} \to G$ и $E_2 = E_{Q,Q^-,Nis} \to G$. Это вложения, поскольку шифификация — точный функтор, и $G = G_{Nis}$. Более того, их образы — подгруппы в G. Мы хотим доказать, что эти подгруппы совпадают. Рассмотрим $E_1 \cap E_2$, из него есть отображения в E_1 и E_2. Покажем, что оба этих отображения являются изоморфизмами. Это достаточно проверить на локальных гензелевых кольцах R, содержащих k (здесь мы считаем, что категорию Sm_k пополнили локализациями — или фильтрованными пределами — гладких схем). Но для локальных колец это известно по работе Петрова–Ставровой (и по SGA3 для минимальных параболических подгрупп). Более того, $E_{P,P^-}(R)$ нормальна в $G(R)$. Поэтому и $E_1(-)$, $E_2(-)$ — пучки нормальных подгрупп в $G(-)$.

$K_{1,\mathrm{Nis}}^{G,P,P^-}(-) = G(-)/E_{P,P^-,\mathrm{Nis}}(-)$, поскольку шифификация — точный функтор. Поэтому левая часть является группой и не зависит от P, P^-. $\square$

Лемма 7. *Пусть k — поле характеристики 0, G — редуктивная группа над k такая, что любая нормальная полупростая подгруппа в G содержит $\mathbb{G}_m^2$.*

1. (a) $K_1^G(-)\colon \mathrm{Sm}_k \to \mathrm{Groups}$ *не зависит от строго собственной параболической подгруппы P.*

   (b) *Если R — регулярное кольцо, содержащее k, то $K_1^G(R[t]) = K_1^G(R)$.*

   (c) *Если R — регулярное локальное кольцо, содержащее k, то $K_1^G(R)$ вкладывается в $K_1^G(K)$, где $K = \mathrm{Frac}(R)$.*

2. *Пусть, кроме того, G — односвязная полупростая группа.*

   (a) *Для любой $X \in \mathrm{Sm}_k$ выполнено $K_1^G(\mathbb{A}_X^1) \cong K_{1,\mathrm{Nis}}^G(X) \cong K_{1,\mathrm{Nis}}^G(\mathbb{G}_{m,X})$.*

(b) *Для любой* $X \in \mathrm{Sm}_k$ $K_{1,\mathrm{Nis}}(X)$ *вкладывается в* $\prod_{i=1}^N K_1^G(k(X_i))$, *где* $X = \coprod_{i=1}^N X_i$ *— компоненты связности (при этом* $K_1^G(k(X_i)) = K_{1,\mathrm{Nis}}^G(k(X_i))$, *поскольку* $k(X_i)$ *— поле).*

Доказательство. 1) было известно ранее. Для доказательства 2b) рассмотрим $F(X) = \prod_{i=1}^N K_1^G(k(X_i))$. Можно доказать, что F — пучок Нисневича. Есть отображение $K_{1,\mathrm{Nis}}^G \to F$; оно инъективно, поскольку оно инъективно для локальных регулярных гензелевых колец. $\square$

Наша цель — доказать, что в 2b) имеет место изоморфизм.

Определение 8. *Пусть функтор* $F\colon \mathrm{Sm}_k \to \mathrm{Ab}$ *аддитивен (то есть,* $F(X_1 \coprod X_2) = F(X_1) \oplus F(X_2)$*). Будем говорить, что* F *— функтор со слабыми ориентированными трансферами, если для любого конечного плоского generically étale морфизма* $f\colon X \to Y$ *и любого вложения* $i\colon X \to Y \times \mathbb{A}^n$ *с тривиальным нормальным расслоением задан* $f_*\colon F(X) \to F(Y)$ *так, что*

1. f_* *согласован с разбиениями вида* $X = X_1 \coprod X_2$*, то есть,*

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\cong"'] & F(Y) \\ F(X_1) \oplus F(X_2) \arrow[ur, "(f_{1*}, f_{2*})"'] & \end{tikzcd}$$

2. *если* $s\colon Y \to X = X_1 \coprod X_2$ *— сечение к* $f\colon X \to Y$*, то* $f_{1,*} = s^*$.

3. *пусть* $g\colon Y' \to Y$ *— либо гладкий морфизм, либо замкнутое вложение гладкого главного дивизора; тогда диаграмма*

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"'] & F(X \times_Y Y') \arrow[d] \\ F(Y) \arrow[r, "g^*"'] & F(Y') \end{tikzcd}$$

   коммутативна;

4. *морфизм* f_* *не зависит от добавления вложения* $i\colon X \to Y \times \mathbb{A}^n \xrightarrow{(\mathrm{id},0)} Y \times \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^1$.

Теорема 9. *Если* k *— поле характеристики* 0, G *— односвязная простая группа типа* A_l *или* D_l *над* k*, содержащая* $\mathbb{G}_m^2$*, то* $K_{1,\mathrm{Nis}}^G$ *— функтор со слабыми ориентированными трансферами на аффинных гладких многообразиях над* k *(определение то же самое, но все условия проверяются на аффинных).*

Заметим, что B_l, C_l выполнено $K_{1,\mathrm{Nis}}^{G} = 1$.

Пусть G — односвязная простая группа классического типа. Классические типы образуют серии, и G всегда (даже если она изотропна) можно вложить в группу большего ранга. Нам понадобится, что есть редуктивная группа H вида $H = G \times \mathbb{G}_m/C$, где C — некоторая конечная группа. Более того, в качестве H можно взять рациональную группу (см. Черноусов–Меркурьев). Точнее: есть короткая точная последовательность

$$1 \to G \to H \to T \to 1,$$

где T — тор, а H — редуктивная рациональная группа. Например, $G = \mathrm{SL}_1(A)$, $H = \mathrm{GL}_1(A)$. Или $G = \mathrm{Spin}$, H — четная группа Клиффорда.

Следствие: $K_1^G(K)$ абелев для любого поля K, содержащего k.

Как построить трансферы на полях?

Пусть K/L — конечное сепарабельное расширение полей. Для торов над полями есть отображение нормы. А именно, пусть T — тор над L. Тогда $T(K)$ — абелева группа, на которой действует группа Галуа расширения L/K; можно перемножить все элементы из одной орбиты, и получится инвариантный элемент. Получили отображение $N_{K/L}\colon T(K) \to T(L)$. Для нестабильных K_1-функторов так просто не получается. Действуем хитрее: устроим гомоморфизм $N_{K/L}\colon R_{K/L}(T) \to T$. Рассмотрим две короткие точные последовательности

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & G \arrow[r] & H \arrow[r, "\mu"] & T \arrow[r] & 1 \\
1 \arrow[r] & R_{K/L}(G) \arrow[r] & R_{K/L}(H) \arrow[r, "\mu'"] & R_{K/L}(T) \arrow[r] \arrow[u, "N_{K/L}=\beta"'] & 1
\end{tikzcd}$$

Обозначим $H' = R_{K/L}(H)$. Норменный принцип: если $x \in \mu'(H'(F))$, то $N_{K/L}(x) \in \mu(H(F))$ для любого поля F/L. Пользуясь этим, можно доказать, что β поднимается до отображения β' из открытого подмножества $U \subseteq H'$ в H так, что соответствующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r] & T \\
U \arrow[r] \arrow[u, "\beta'"'] & R_{K/L}(T) \arrow[u, "\beta"']
\end{tikzcd}$$

Пользуясь этим, мы можем построить отображение $K_1^{H'}(L) \to K_1^{H}(L)$. Заметим, что $H'(L) = U(L)U(L)$; поэтому строится отображение $H'(L) \to K_1^H(L)$. Оно является гомоморфизмом групп (это следует из рациональности H). Заметим, что $K_1^G(L)$ вкладывается в $K_1^{H'}(L)$, и $K_1^G(L)$ вкладывается в $K_1^H(L)$. Поэтому можно получить отображение $K_1^{G'}(L) \to K_1^G(L)$.

См. Chernousov, Merkurjev, ‘R-equivalence and special unitary groups’, ‘…and spinor groups’.

Следствия из теорем Росса и наличия трансферов для $K^G_{1,\mathrm{Nis}}$ (и $\mathbb{A}^1$-инвариантности):

1. $H^n_{\mathrm{Nis}}(-, K^G_{1,\mathrm{Nis}})$ является $\mathbb{A}^1$-инвариантным для любого $n \geq 0$.

2. из книжки Мореля теперь следует, что если $X \to Y$ — главное однородное G-пространство, локально тривиальное в топологии Нисневича (котором соответствует $\xi \in H^1_{\mathrm{Nis}}(Y, G)$), то есть длинная точная последовательность для $\pi^{\mathbb{A}^1}_{i,\mathrm{Nis}}(-)$.

3. $K^G_{1,\mathrm{Nis}}(X) \cong \coprod K^G_{1,\mathrm{Nis}}(k(X_i))$, где $X = \coprod X_i$ (следует из аналога гипотезы Герстена и $\mathbb{G}_m$-инвариантности).

Гипотеза: R — локальное гензелово кольцо содержащее k, $\mathfrak{m}$ — его максимальный идеал. Тогда $K^G_1(R) \cong K^G_1(R/\mathfrak{m})$. Hazrat доказал это для группы G типа A_l.