Word maps, some ‘lowbrow’ problems

Евгений Плоткин

15.09.2014

1

Пусть θ — многообразие алгебр (то есть, класс алгебр, которые задаются набором тождеств). Пусть $F_2 = F(x, y)$ — свободная алгебра из θ (вообще, обозначаем через $F(x_1, \dots, x_n) = F_n$ свободную алгебру на n элементах). Пусть $w = w(x_1, \dots, x_n) \in F_n$, $A \in \theta$. Слово w задает отображение $A \times \cdots \times A \to A$, которое тоже будет обозначаться буквой w. Набор элементов из A мы будем обозначать так: $\overline{a} = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$.

В формулировке нашей задачи есть свобода выбора: мы можем выбирать многообразие Θ, слово w и алгебру A. В качестве Θ можно выбирать многообразия групп, ассоциативных колец, алгебр Ли. Мы хотим решать уравнения вида $w_1 = w_2$; в языке теории групп можно считать, например, что они имеют вид $w(x_1, \dots, x_n) = 1$.

Пусть Θ — категория групп. В качестве w можно брать

1. $w = x^k$;
2. $w = [x, y]$;
3. $w = [\dots[[x, y], y], \dots, y]$;
4. $w = u_k(x, y)$ — слово, задающее разрешимость;
5. w — произвольное слово.

Как выбирать $A = G$? Есть разные полюса:

- свободные группы, гиперболические группы;
- группы с каким-то условием конечности: конечные, линейные (над коммутативным кольцом);

Группа с условием конечности, как правило, очень сильно далека от произвольной бесконечной группы.

Например, возьмем группу, в которой выполняется тождество $x^k = 1$, где k — простое число. Для $k = 2$ любая конечно порожденная группа с таким свойством будет конечной. Для $k = 3$ тоже. Для $k = 4$ это теорема Санова. Для $k = 6$ — теорема Холла. Для $k = 5$ никто не знает. Проблема Бернсайда: пусть Θ задается тождеством $x^k = 1$. В нем есть свободная группа $F(x_1, \ldots, x_d)$, $d > 1$. Пусть а) $k > 665$; б) $k > 10^{10^{10}}$. Тогда а) эта группа бесконечна; б) любая собственная подгруппа этой группы — циклическая группа порядка p.

С другой стороны, в мире свободных групп это вопрос логики. Рассмотрим уравнение $[x, y] = A$, где A — фиксированный элемент G. Если G — конечная простая группа, то уравнение $[x, y] = A$ имеет решение (проблема Оре). Для свободных групп это задача, решенная Мальцевым: описаны все решения такого уравнения.

Проблема Тарского: есть $F(x, y)$ и $F(x, y, z)$. Можно ли их различить логически? Нет; они имеют одинаковые теории первого порядка. Доказательство очень геометрично и сводится (элиминация кванторов) к следующему вопросу: если система уравнений разрешима в одной из этих групп, то верно ли, что она разрешима в другой?

Еще один факт: почти все подгруппы свободной группы имеют бесконечную ширину относительно почти любого слова.

Выберем $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$, w — некоторое слово. Является ли отображение, задаваемое w, сюръективным?

1. $w = x^k$: ответ — да, группа G [бесконечно] делима. Недавно получена классификация всех линейных делимых групп над $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$.

2. $w = [x, y]$: ответ — да, это доказал Ree в 1964 году.

3. $w = [x, \underbrace{y, \ldots, y}_{k}] = e_k(x, y)$ — *энгелево слово.* Всегда ли уравнение $e_k(x, y) = a$ имеет решение? Ответ — да.

Как решается вопрос про энгелевость? Пусть $c^2 = 1$, $d^2 = 1$. Тогда

$$\begin{aligned} [c, d] &= cdc^{-1}d^{-1} = cdcd = (cd)^2, \\ [c, d, d] &= [(cd)^2, d] = (cd)^2 d (cd)^{-2} d = (cdcd)d(dcdc)d = (cd)^4, \\ e_n(c, d) &= (cd)^{\alpha}. \end{aligned}$$

Поэтому уравнение $e_n(c, d)$ сводится к уравнению $cd = \sqrt[\alpha]{a}$ (мы уже знаем, что группа делима). Произведением двух инволюций может быть все что угодно.

Гипотеза: для любого $w \in F_2(x,y)$ отображение $w\colon G \times \cdots \times G \to G$, где $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$, сюръективно.

Подставим вместо x и y две каких-нибудь матрицы, зависящих от параметров t_1, t_2. Тогда $w(x,y) = \begin{pmatrix} p_1(t_1,t_2) & p_2(t_1,t_2) \\ p_3(t_1,t_2) & p_4(t_1,t_2) \end{pmatrix}$. Вопрос сюръективности теперь сводится к разрешимости системы алгебраических уравнений.

Основным препятствием в таких вопросах является слово x^k: то есть, если оно разрешимо, то, скорее всего, и для всех остальных ответ «да». Это была гипотеза Шалева: если в конечной простой группе x^k сюръективно, то и любое другое слово сюръективно. Либек построил контрпример, но там слово очень похоже на x^k.

В гипотезе про сюръективность любого слова неизвестно, на что зацепиться: про степени и коммутаторы ответ положителен. Докладчик верит, что тестовым словом является $w(x,y) = [[x,[x,y]],[y,[x,y]]]$. Если подставить вместо x, y две инволюции, то оно схлопнется в тривиальное. Задача: проверить или опровергнуть, что это w задает сюръективное отображение. Это слово находится во втором члене нижнего производного ряда.

Thom: для компактных групп если слово не лежит во втором члене нижнего производного ряда (свободной группы), то оно сюръективно. В компактной группе есть плохое слово, которое всю группу переводит в маленькую окрестность единицы (в вещественной топологии).

Посмотрим на тот же вопрос про $\mathrm{PSL}_3(\mathbb{Z})$. Разрешимо ли уравнение $[x,y] = a$? Никто не знает.

Пусть теперь G — связная полупростая алгебраическая группа над k, где k — алгебраически замкнутое поле. Проблема: является ли $w = e_k(x,y)$ сюръективным словом? Выше мы обсудили случай типа A_1. В новой работе Николая Гордеева доказывается частичный результат для групп типа A_2. Уж тем более ничего не известно для конечных простых групп G.

Теорема Шалева: если w — произвольное слово, то ширина G в w не превосходит 2 для любой конечной простой группы G, порядок которой не меньше $n = n(w)$. Теорема Бореля: если G — полупростая связная алгебраическая группа над любым полем k, то образ вербального отображения $w\colon G^n \to G$ доминантен. Из этого следует, что $w(G)^2 = G$. В этом смысле теорема Шалева естественна.

Задача: возьмем в качестве G группу Каца–Муди (какую-нибудь), или алгебру Каца–Муди над алгебраически замкнутым полем. Сформулировать аналог теоремы Бореля.

Как насчет $PSL_2(\mathbb{C}[t,t^{-1}])$?

Кроме того, аналог гипотезы Оре для групп Каца–Муди до сих пор не сделан.

Аналогом теоремы Бореля является так называемая гипотеза Капланского. Пусть $F_n = F(x_1, \ldots, x_n)$ — свободная ассоциативная алгебра (многочлены от некоммутирующих переменных) над полем k. Иными словами, $F_n = k\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$. Пусть $w \in F_n$, $A = M_l(k)$ — алгебра матриц. Гипотеза: образ отображения $w\colon A^n \to A$ является одним из

1. 0;
2. центр A (примеры: Razmyslov–Formanik–Procesi)
3. матрицы со следом 0.
4. A;

Если w полилинеен, $l = 2$ и поле k квадратично замкнуто, то гипотеза верна. Если $l = 3$, это почти доказано. Вопрос: вместо ассоциативных алгебр возьмем алгебры Ли, а в качестве A — алгебру $\mathfrak{sl}_2$ (ну, или любую простую алгебру над k). Верно ли, что возможно ровно два случая: 0 и вся A? Никто не знает.