Биекции группы верхнетреугольных матриц, сохраняющие коммутирование или Как написать статью

Алексей Степанов

06.10.2014

Пусть G — произвольная группа. Мы рассматриваем биекции $\varphi\colon G \to G$ такие, что $\varphi([a,b]) = [\varphi(a), \varphi(b)]$ (но a priori φ не является гомоморфизмом групп). Такие биекции мы будем называть **PC-отображениями**. Нетрудно понять, что тогда $\varphi(1) = 1$. Обозначим $C = \mathrm{Cent}(G)$, $[\![g,g]\!] = \{[a,b] \mid a,b \in G\}$.

Пример PC-отображения φ, не являющегося автоморфизмом: если $f\colon G \to C$ — функция такая, что $f([a,b]) = 1$ для всех $a,b \in G$, то $\varphi(x) = x \cdot f(x)$. PC-отображения φ такого вида мы будем называть **центральными**.

Wang Dengyin исследовал этот вопрос для группы $UT(n,F)$, Roksana Słowik — для $UT(\infty,F)$ (здесь и далее везде F — поле).

Будем считать, что $n \geq 4$ (при $n = 3$ ответ чуть хитрее), и $F \neq \mathbb{F}_2$. У них все описано с точностью до почти тождественных отображений (это те, которые сохраняют все элементарные трансвекции: $\varphi(t_{ij}(r)) = t_{ij}(r)$).

Теорема 0.1. Любое PC-отображение является композицией следующих:

1. контраградиент ($a \mapsto (a^{-1})^*$), где $x \mapsto x^*$ — композиция транспонирования и сопряжения перъединичной матрицей;
2. полевой автоморфизм;
3. «внутренний автоморфизм» (внутренний или «диагональный» — сопряжение диагональной матрицей): сопряжение элементом из $B(n,F)$;
4. центральное PC-отображение;
5. субцентральное отображение (если $n = \infty$);
6. почти тождественное PC-отображение.

Напомним, что **гиперцентром** называется прообраз центра при проекции $G \to [G,G]$. Что такое субцентральное отображение? Пусть $r,s \in F$. Положим

$$\varphi_{r,s}(a) = t_{2n}(ra_{12})at_{1,n-1}(sa_{n-1,n}).$$

Оказывается, это PC-отображение.

Теорема 0.2 (Hołubowski–Stepanov)**.** Любое почти тождественное PC-отображение является центральным.

Далее везде φ — почти тождественное PC-отображение.

Лемма 0.3. $\varphi(a)_{ij} = a_{ij}$ для всех $i \neq 1, j \neq n$.

Доказательство. Можно прокоммутировать a пару раз с трансвекциями и получить трансвекцию. □

Лемма 0.4. $\varphi(a)_{ij} = a_{ij}$ для всех i, j, кроме $(i,j) = (1, n-1)$, $(1,n)$, $(2,n)$.

Таким образом, любое почти тождественное отображение является умножением на элемент гиперцентра.

Посмотрим на

$$[t_{12}(r)t_{34}(s), t_{23}(u)] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ru & -rsu & \dots \\ 0 & 1 & 0 & -su & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Прокоммутировав результат с $t_{45}(1)$, получаем, что на позициях $(1,5)$, $(2,5)$ мы можем получить два любых ненулевых элемента. Аналогично, в шестом столбце можно получить три первых ненулевых элемента, и т. д. Поэтому φ сохраняет произвольную матрицу из второго члена нижнего центрального ряда. Теперь произвольную матрицу a можно прокоммутировать с $t_{34}(1)$ и потом еще с каким-то $t_{**}(*)$, чтобы получить a_{13} и a_{23} в позициях $(1,5)$ и $(2,5)$. Матрица такого вида сохраняется; и, применяя φ, получаем, что и $\varphi(a_{13}) = a_{13}$ (при наличии пятого столбца). Дальше происходит индукция.

Доказательство для случая $n = \infty$ закончено, поскольку так можно добраться до любого элемента в первой строчке. Для конечного случая мы теперь знаем, что $\varphi(a) = a \cdot t_{1,n-1}(r(a))t_{2,n}(s(a))t_{1,n}(u(a))$. Коммутируя с радикалом Леви параболической подгруппы P_1, получаем, что $s(a) = \overline{s} \cdot a_{23}$. Из этого следует, что умножение на $t_{2,n}(s(a))$ является композицией сопряжения и центрального (и вообще не сохраняет трансвекции). Аналогично происходит с r, и остается только $u(a)$, что дает центральное отображение.