Центральность K_2 для E_l

Сергей Синчук

05.01.2015

1

Далее везде $\Phi = E_6, E_7, E_8$.

Теорема 1.1. Положим $K_2(\Phi, R) = \operatorname{Ker}(\operatorname{St}(\Phi, R) \to G_{\mathrm{sc}}(\Phi, R))$. Имеется точная последовательность

$$0 \to K_2(\Phi, R) \to \operatorname{St}(\Phi, R) \to G_{\mathrm{sc}}(\Phi, R) \to K_1(\Phi, R) \to 0.$$

Тогда $K_2(\Phi, R) \subseteq \operatorname{Cent}(\operatorname{St}(\Phi, R))$.

Эта теорема доказана для $\Phi = A_l$, $l \geq 3$ (van der Kallen, 1977). Для $\Phi = C_l$, $l \geq 3$ ее доказал Лавренов (2014). Для $\Phi = A_2, B_2, G_2$ это неверно (Wendt, 2012).

Доказательство для A_l хорошее, поскольку дается в терминах «другого представления» ("another presentation"). Построенная стрелка $\operatorname{St}(\Phi, R) \to G_{\mathrm{sc}}(\Phi, R)$ в этом случае является скрещенным модулем.

Из существования такого скрещенного модуля сразу следуют

- нормальность элементарной подгруппы;
- центральность K_2;
- конструкция автоморфизмов группы Стейнберга.

2 Основная редукция

Пусть $g \in \operatorname{St}(\Phi, R[t], tR[t])$ (позднее мы докажем, что это подгруппа в $\operatorname{St}(\Phi, R[t])$). Утверждение: $g = 1$ тогда и только тогда, когда $(\lambda_{\mathfrak{m}})_*(g) = 1$ для всех максимальных идеалов $\mathfrak{m} \trianglelefteq R$. Это утверждение называется локально-глобальным принципом Квиллена–Суслина.

Этот принцип следует из следующего свойства вырезания: если $a \in R$ не нильпотентен, то

$$\operatorname{St}(\Phi, R_a[t], tR_a[t]) \cong \operatorname{St}(\Phi, R \ltimes tR_a[t], tR_a[t]).$$

Здесь $R \ltimes tR_a[t] = \varinjlim (R[t])_i$, где структурные отображения выглядят так: $(R[t])_i \to (R[t])_j$, $t \mapsto a^{j-i}t$.

Обозначим левую часть через G_1, а правую через G_2. Туленбаев формулирует это свойство так: отображение $\theta\colon \operatorname{St}(\Phi, R[t], tR[t]) \to G_2$ пропускается через $T\colon G_1 \to G_2$:

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{St}(\Phi, R[t], tR[t]) \arrow[d, "\lambda_a"] \arrow[dr, "\theta"] & \\
G_1 \arrow[r, "T"] & G_2
\end{tikzcd}$$

Туленбаев доказывает это для $\Phi = A_l$ при $l \geq 4$ — именно поэтому мы не можем пока доказать центральность K_2 для $\Phi = F_l$. Стрелка $\theta\colon \operatorname{St}(\Phi, R[t], tR[t]) \to G_2$ получается из $\theta\colon R[t] \to R \ltimes tR_a[t]$. Имеется также очевидный морфизм $\lambda_a\colon G_2 \to G_1$ — локализация в главном члене.

Как построить T? Возьмем $z_\alpha(s, \xi) = x_\alpha(s)^{x_{-\alpha}(\xi)} \in G_1$, где $s \in tR_a[t]$, $\xi \in R_a[t]$. Куда его отправить в G_2? Мы ниже напишем формулу.

Для доказательства локально-глобального принципа не нужно доказывать свойство вырезания в полной общности, достаточно построить такую диаграмму, как у Туленбаева.

Пусть $I \trianglelefteq R$. Если мы докажем, что $\operatorname{St}(E_l, R, I) = \operatorname{colim}_? \operatorname{St}(A_4, R, I)$, то есть надежда построить такую стрелку: легко строить стрелки из копределов. На самом деле, так и есть: $\operatorname{St}(E_l, R, I)$ является копределом некоторого функтора $\operatorname{St}(-, R, I)$. Функтор строится так: рассмотрим двудольный граф; в одной доле — всевозможные подсистемы $A_1 \subseteq \Phi$, в другой —- всевозможные подсистемы $A_4 \subseteq \Phi$, и проведены ребра для всех включений $A_1 \to A_4$.

3 Curtis–Tits presentation

Утверждение: $\mathrm{St}(\Phi, R) = \operatorname{colim} \mathrm{St}(-, R)$, где копредел берется по аналогичному функтору, который строится по вложениям A_1 в системы ранга два, причем только для вложений, происходящих из диаграммы Дынкина (см. Allcock, Steinberg groups as amalgams).

Это утверждение следует из теоремы

Теорема 3.1. Если Φ — система корней без кратных связей, то $\mathrm{St}(\Phi, R, I) \cong \operatorname{colim} \mathrm{St}(-, R, I)$, где предел берется по вложениям $A_1 \to A_3$

Лемма 3.2. Пусть Φ — неприводимая система корней без кратных связей, $\operatorname{rk}\Phi \geq 3$. Тогда $\mathrm{St}(\Phi, R) \cong \operatorname{colim} \mathrm{St}(-, R)$, где копредел берется по вложениям $A_1 \to A_3$.

Эта лемма очевидным образом следует из следующей:

Лемма 3.3. Если $\alpha, \beta \in \Phi$, где Φ — неприводимая система корней без кратных связей, и $\operatorname{rk}\Phi \geq 3$, то существует подсистема корней $\Psi \subseteq \Phi$ типа A_3, содержащая α и β.

Лемма 3.4. Если $\Phi = D_l$ или E_l, $\Psi \subseteq \Phi$ — система типа A_3, то она сопряжена с некоторой поддиаграммой.

После этого нетрудно понять, что любая подсистема типа A_3 в E_l (но не в D_l!) вкладывается в подсистему типа A_4.

Для доказательства центральности K_2 осталось доказать теорему 3.1 и доказать, что можно склеить стрелки T из доказательства Туленбаева для A_4 так, чтобы получилась стрелка для E_l.

Лемма 3.5. Пусть Φ — система корней без кратных связей. Пусть $\Psi, \Psi' \subseteq \Phi$ — две различные подсистемы типа A_3, и пусть их пересечение $\Psi_1 \cap \Psi_2$ непусто. Тогда существует цепочка подсистем $\Psi = \Psi_1, \ldots, \Psi_n = \Psi'$ такая, что пересечение $\Psi_i \cap \Psi_{i+1}$ имеет тип A_2.

Доказательство. Пусть $\alpha \perp \beta$, где $\alpha, \beta \in \Phi$. Сколько существует подсистем типа A_3, содержащих α и β? Гипотеза: для $\Phi = A_l$ их две штуки, а для $\Phi = D_l, E_l$ она единственна. Эта гипотеза должна следовать из статьи Carter, 'Conjugacy classes in the Weyl Group' (но, вроде бы, не следует). □

Самое время определить относительную группу Стейнберга $\mathrm{St}(\Phi, R, I)$. Рассмотрим декартов квадрат

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"] & R \arrow[d, "\pi"] \\ R \arrow[r, "\pi"] & R/I \end{tikzcd}$$

и положим $\mathrm{St}(\Phi, R, I) = \frac{\mathrm{Ker} p_1}{[\mathrm{Ker} p_1, \mathrm{Ker} p_2]}$.

Если проекция $R \to R/I$ расщепляется, то $\mathrm{St}(\Phi, R, I) \leq \mathrm{St}(\Phi, R)$. В общем случае имеется точная последовательность

$$1 \to \frac{\mathrm{Ker} p_1 \cap \mathrm{Ker} p_2}{[\mathrm{Ker} p_1, \mathrm{Ker} p_2]} \to \mathrm{St}(\Phi, R, I) \to \mathrm{St}(\Phi, R) \to \mathrm{St}(\Phi, R/I) \to 0.$$

Центральность K_2 состоит в том, что действие $\mathrm{St}(\Phi, R)$ на $\frac{\mathrm{Ker} p_1 \cap \mathrm{Ker} p_2}{[\mathrm{Ker} p_1, \mathrm{Ker} p_2]}$ тривиально, то есть, что это central relative extension. На самом деле это даже universal central relative extension, и это следует из Prop. 6 в статье Loday (см. также Jan Strucker,...). У нас, впрочем, проекция $R \to R/I$ будет всегда расщепляться.

Лемма 3.6. $\mathrm{St}(n, R, I)$ задается образующими $X_{v,w}$, где $v \in E(n, R) \cdot e_1$, $w \in {}^n I$, $wv = 0$ с соотношениями

- $X_{v, w_1 + w_2} = X_{v, w_1} X_{v, w_2}$;
- $X_{v_1 + b v_2, w} = X_{v_1, w} X_{v_2, bw}$, если $(v_1, v_2) \in \mathrm{Um}(n \times 2, R)$;
- $X_{v,w}^{x_{v'w'}} = X_{(e - v'w')v, w(e + v'w')}$.

Это определение совпадает с определением Loday; второе соотношение нужно для того, чтобы на этой группе действовала абсолютная группа Стейнберга.

На самом деле относительную группу Стейнберга нужно определять как группу с действием не абсолютной группы Стейнберга, а stem Steinberg group (см. Huebschmann, 1973 или около того).

Пусть G — группа, действующая на множестве X. Рассмотрим подмножество $R \subseteq F(G \times X)$; тогда можно рассмотреть группы $F(G \times X)/(G \cdot R)^{F(G \times X)}$. Изоморфизм группы H с этой группой называется *представлением H как группы с действием G*. Вместо пары $(g, x) \in G \times X$ удобно писать x^g.

Утверждается, что $\mathrm{St}(\Phi, R, I)$ обладает следующим представлением как группы с действием $G = \mathrm{St}(\Phi, R)$, где $X = \{y_\alpha(s) \mid \alpha \in \Phi, s \in I\}$:

- $y_\alpha(s + t) = y_\alpha(s) y_\alpha(t)$;
- относительная коммутационная формула Шевалле;
- $y_\alpha(s)^{x_\beta(\xi)} = \begin{cases} y_\alpha(s) y_{\alpha+\beta}(N_{\alpha\beta} s \xi), & \alpha \neq -\beta, \alpha + \beta \in \Phi; \\ y_\alpha(s), & \alpha \neq -\beta, \alpha + \beta \notin \Phi; \end{cases}$
- $y_\alpha(s)^{g x_\beta(t)} = y_\beta(-t) y_\alpha(s)^g y_\beta(t)$, если $s, t \in I$, $g \in \mathrm{St}(\Phi, R)$.