Структурируемые алгебры и алгебраические группы

Анастасия Ставрова

02.03.2015

Содержание

1 Первые определения

Все знают, что на 27-мерном представлении E_6 есть структура йордановой алгебры, а на 56-мерном представлении E_7 есть структура алгебры Брауна. Оба этих факта обобщаются.

Определение 1.1 (B. Allison, 1978)**.** Пусть k — поле, характеристика которого не равна 2 и 3. **Структурируемая алгебра** над k — это конечномерная k-алгебра A (некоммутативная, неассоциативная) с инволюцией $\bar{\cdot}$(антиавтоморфизмом, квадрат которого тождественен) такая, что $[V_{x,y}, V_{z,w}] = V_{\{x,y,z\},w} - V_{z,\{y,x,w\}}$ для любых $x, y, z, w \in A$, где $\{x, y, z\} = V_{x,y}(z) = (x\overline{y})z + (z\overline{y})x - (z\overline{x})y \in \mathrm{End}_k(A)$.

Примеры:

- обычные ассоциативные алгебры с единицей и тривиальной инволюцией.
- йордановы алгебры.

Определение 1.2. Йорданова алгебра над k — это коммутативная алгебра с единицей такая, что $(x^2y)x = x^2(yx)$ для всех $x, y \in J$.

При этом йордановы алгеры = структурируемые алгебры с тривиальной инволюцией.

Определение 1.3. Элемент $a \in A$ называется **conjugate invertible** (сопряженно обратимым), если существует $\widehat{a} \in A$ такой, что $V_{a,\widehat{a}} = \mathrm{id}_A$.

Замечание 1.4. Операция умножения в структурируемой алгебре выражается через V: Пусть $\langle a, b, c\rangle = \frac{1}{2}(\{a, b, c\} + \{b, a, c\} + \{a, c, b\} - \{b, c, a\})$. Тогда $ab = \langle a, 1, b\rangle$ и $\overline{a} = \langle 1, a, 1\rangle$.

Если A — ассоциативаная алгебра с инволюцией, то $\widehat{a} = \overline{a}^{-1}$.

Определение 1.5. A — **структурируемая алгебра с делением**, если любой ненулевой элемент $a \in A$ имеет сопряженно обратный.

Определение 1.6. $S = \{s \in A \mid \overline{s} = -s\}$ — косоэрмитовы элементы A. Определим $\psi\colon A \times A \to S$ формулой $(x, y) \mapsto x\overline{y} - y\overline{x}$.

Построим 5-градуированную алгебру Ли.

Определение 1.7. Пусть L/k — $\mathbb{Z}$-градуированная алгебра Ли. Она называется **5-градуированную**, если $L_i = 0$ для любого i такого, что $|i| > 2$. Таким образом,

$$L = \bigoplus_{i=-2}^{2} L_i.$$

Пусть A — структурируемая алгебра над k. Положим $\mathrm{Instrl}(A) = \langle V_{x,y} \mid x, y \in A\rangle_k \subseteq \mathrm{End}_k(A)$. Тогда $K(A) = S_- \oplus A_- \oplus \mathrm{Instrl}(A) \oplus A_+ \oplus S_+$, где $A_\pm$ — две копии A, а $S_\pm$ — две копии S. Заметим, что $\mathrm{Instrl}(A)$ снабжена скобкой Ли. Если $x, y \in A$, $s, t \in S$, то положим $[x_+, y_+] = \pm\psi(x, y)_+$, $[x_+, y_-] = \pm V_{x,y} \in \mathrm{Instrl}(A)$. Далее, $[V_{a,b}, x_+] = \pm V_{a,b}(x)$, и $[V_{a,b}, t_+ = \pm\psi(a, tb)_+$. Наконец, $[x_+, t_+] = 0$, $[x_+, t_-] = \pm(xt)_+$, и $[t_+, s_-] = \pm\frac{1}{2} V_{1,t_+s_-} - V_{t_+,s_-}$. Тогда $K(A)$ — 5-градуированная алгебра Ли.

Определение 1.8. Пусть $K_\zeta(A) = K(A) + k\zeta$, где ζ — градуирующее дифференцирование на $K(A)$. Для $x \in K(A)_i$ положим $\zeta(x) = ix$ для $-2 \le i \le 2$.

Allison в 1979 году доказал следующие вещи:

1. $K(A)$ — простая алгебра Ли тогда и только тогда, когда A — простая структурируемая алгебра (та, в которой нет двусторонних идеалов, инвариантных относительно инволюции).

2. Пусть L — простая 5-градуированная алгебра Ли над k. Когда L имеет вид $K(A)$?

   (a) пусть $\mathrm{char}(k) \neq 2, 3, 5$. Тогда L изоморфна алгебре вида $K(A)$ тогда и только тогда, когда L содержит sl_2 таким образом, что L раскладывается в прямую сумму неприводимых sl_2-модулей со старшими весами $0, 2, 4$.

   (b) пусть $\mathrm{char}(k) = 0$. Тогда L изоморфна алгебре вида $K(A)$ тогда и только тогда, когда L изотропна, то есть содержит расщепимую торическую подалгебру.

Пример: $L = \mathrm{E}_8$ (расщепимая); на L есть 5-градуировка в соответствии с коэффициентом при крайнем корне. Получаем 56-мерную структурируемую алгебру A (она называется **алгеброй Брауна**).

2 Алгебраические структурируемые алгебры

Для всех $(x, s) \in K(A)_{\pm 1} \oplus K(A)_{\pm 2}$ (одновременно оба $+$ или оба $-$) рассмотрим $\exp(x, s) = \sum_{i=0}^{4} \frac{1}{i!} \mathrm{ad}(x + s) \in \mathrm{End}(K_\zeta(A))$.

Определение 2.1. Структурируемая алгебра A называется **алгебраической**, если для всех x, s как выше отображение $\exp(x, s)$ лежит в $\mathrm{Aut}(K_\zeta(A))$.

Упражнение 2.2. Если $\mathrm{char}\, k \neq 2, 3, 5$, то любая структурируемая алгебра A является алгебраической. Если A — йорданова, то она всегда алгебраическая (даже в характеристике 5).

Свойства экспоненты:

1. $\exp(x, s)\exp(y, t) = \exp(x + y, s + t + [x, y]/2)$.

2. Эндоморфизм $\exp(x, s)$ обратим и $\exp(x, s)^{-1} = \exp(-x, -s)$.

Лемма 2.3. Пусть G — присоединенная простая алгебраическая группа над k, $\mathrm{char}\, k \neq 2, 3$, и пусть $L = \mathrm{Lie}(G)$. Тогда

1. $L = \mathrm{Der}(L)$;

2. $[L, L]$ — простая алгебра Ли, и $L = \mathrm{Der}([L, L])$;

3. если G имеет тип A_n и $\mathrm{char}\, k$ делит $n+1$, то $\dim[L, L = \dim L - 1$, а в других случаях $L = [L, L]$;

4. есть изоморфизмы $G \to \mathrm{Aut}(L)^0 \to \mathrm{Aut}([L, L])^0$.

Теорема 2.4. Пусть k — поле, $\mathrm{char}\, k \neq 2, 3$, A — простая алгебраическая структурируемая алгебра. Тогда $G = \mathrm{Aut}(K(A))^0$ — присоединенная простая алгебраическая группа над k изотропного ранга ≥ 1.

Доказательство. Определим $U_\pm \subseteq \mathrm{GL}(K(A))$ так: $U_+(R) = \{\exp(x, s) \mid x \in A_+ \otimes R, s \in S_+ \otimes R\}$ для любой k-алгебры R. Тогда $G = \langle U_+, U_-, H \rangle$ как алгебраическая группа над k. Здесь $\mathbb{G}_m \cong H \leq \mathrm{GL}(K(A))$ задает $\mathbb{Z}$-градуировку на $K(A)$. □

Теорема 2.5. В условиях теоремы 2.4: изотропный ранг G тогда и только тогда, когда A — структурируемая алгебра с делением.

Вопрос: когда простая группа G изоморфна группе вида $\mathrm{Aut}(K(A))^0$ для какой-то A? Пусть G — присоединенная простая алгебраическая группа над k, где $\mathrm{char}\, k \neq 2, 3$, $L = \mathrm{Lie}(G)$ с 5-градуировкой $L = \bigoplus_{i=-2}^{2} L_i$ (в частности, из этого следует, что G изотропна).

В то же время $L = \bigoplus_{\alpha \in \Phi(H,G)} L_\alpha \oplus L_0$. Тогда существует $J \subseteq \Pi \subseteq \Phi(H, G)$ такой, что $L_i = \bigoplus_{\sum_{\beta \in J} m_\beta(\alpha) = i} L_\alpha$. Из-за того, что у нас 5-градуировка, на J есть серьезные ограничения. Варианты таковы:

1. $J = \{\beta\}$, $m_\beta(\widehat{\alpha}) \leq 2$.

2. $J = \{\beta_1, \beta_2\}$, $m_{\beta_1}(\widehat{\alpha}) = m_{\beta_2}(\widehat{\alpha}) = 1$.

Определение 2.6. Пусть Φ — система корней. Тогда **opposition involution** s_0 — это $-w_0$, где w_0 — самый длинный элемент $W(\Phi)$. Нетрудно понять, что $s_0 \neq \mathrm{id}$ только для A_l, D_{l+1}, E_6.

Теорема 2.7. Пусть G — присоединенная простая алгебраическая группа над k, $\mathrm{char}\, k \neq 2, 3$, изотропный ранг G не менее 1. Пусть $\mathrm{Lie}(G) = \bigoplus_{i=-2}^{2} \mathrm{Lie}(G)_i$ — 5-градуировка такая, что $s_0(J) = J$. Тогда существует простая алгебраическая структурируемая алгебра A такая, что $G \cong \mathrm{Aut}(K(A))^0$ и $K(A) \cong [\mathrm{Lie}(G), \mathrm{Lie}(G)]$ как 5-градуированные алгебры Ли.

Allison–Faulkner: для построения A достаточно найти 1. Это соответствует $x \in L_\alpha$ такому, что $\exp(x, 0) = \exp(y, t) g \exp(z, s)$ для $(y, t), (z, s) \in L_{-1} \oplus L_{-2}$ и $g(\zeta) = -\zeta$ (то есть, $g(L_i) = \overline{L_{-i}}$ для всех i). Иными словами, $\exp(x, 0) \in U_- w U_-$, где $w(P_+) = P_-$ (это гарантируется тем, что их тип инвариантен относительно opposition involution).

3 Структурируемые алгебры и тройственность (Виктор Петров)

В F_4 есть три подсистемы типа B_4, любые две из которых пересекаются по D_4. В E_7 есть три подсистемы вида $D_6 + A_1$, любые две из которых пересекаются по $D_4 + 3A_1$. В E_8 есть три подсистемы типа D_8, любые две из которых пересекаются по $D_4 + D_4$. Или три подсистемы типа $E_7 + A_1$, любые две из которых пересекаются по $E_6 + 2D_1$. Первое отвечает структурируемой алгебре $\mathbb{O}$, второе — $\mathbb{O} \otimes \mathbb{H}$ (или 32-мерной алгебре Брауна), третье — $\mathbb{O} \otimes \mathbb{O}$, а четвертое — 56-мерной алгебре Брауна $\mathbb{B}$. Это как-то связано с плоскостью Розенфельда $(\mathbb{O} \otimes \mathbb{O})\mathbb{P}^2$ или $\mathbb{B}\mathbb{P}^2$.