Геометрия коротких корневых подгрупп

Владимир Нестеров

30.03.2015

Содержание

1

Пусть Φ — приведенная неприводимая система корней, K –0 поле. Рассмотрим односвязную группу Шевалле $G = G_{sc}(\Phi, K)$ типа Φ над полем K. Пусть $x_\alpha(t)$ — элементарный унипотентный корневой элемент. Есть элементарная корневая подгруппа $X_\alpha = \{x_\alpha(t) \mid t \in K\}$; пусть $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ — простые корни, тогда на Φ зафиксирован порядок. Обозначим через δ максимальный длинный корень, а ρ — максимальный короткий. Иными словами, $(\rho, \alpha) \geq 0$ и $(\delta, \alpha) \geq 0$ для всех $\alpha \in \Phi^+$.

Длинной корневой подгруппой называется любая подгруппа вида $X_\delta^g = g^{-1} X_\delta g$; **короткой корневой подгруппой** называется любая подгруппа вида x_ρ^g. Короткие корневые подгруппы есть только в группах типов $\mathrm{B}_l, \mathrm{C}_l, \mathrm{F}_4, \mathrm{G}_2$.

Первый результат в этом направлении — McLaughlin, 1967: описание неприводимых подгрупп $\mathrm{SL}(n, K)$, порожденные трансвекциями (K — любое поле, кроме поля из двух элементов). Stark, 1974 — то же для $\mathrm{SO}(n, K)$. Kantor, 1979 — описание подгрупп, порожденных длинными корневыми элементами над конечным полем. Cooperstein, 1979, 1980 — исключительные группы над конечным полем. Stark, 1994. Timmesfeld, 1991 — k-корневые подгруппы.

Неприводимые короткие корневые подгруппы изучались Ли Шанчжы, 1984–1985. Например:

Теорема 1.1. *В группе $\mathrm{SO}(n, K)$ не существует неприводимых подгрупп, порожденных короткими корневыми подгруппами и не содержащих длинных корневых подгрупп.*

Теорема 1.2. *Если H — неприводимая подгруппа в $\mathrm{Sp}(2l, K)$, порожденная корневыми подгруппами, не содержащая длинных корневых подгрупп, то H сопряжена либо с какой-то SL*

Ключевой элемент: описание подгрупп, порожденных парой корневых подгрупп.

Теорема 1.3. *Пусть X, Y — две длинные корневые подгруппы в $G(\Phi, K)$, и $X \neq Y$. Тогда существует $g \in G$ такой, что $gXg^{-1} = X_\alpha$, $gYg^{-1} = X_\beta$. Пусть $\theta = \angle(\alpha, \beta)$; тогда верно ровно одно из следующих:*

- $\theta = \pi/3$, $\langle X, Y \rangle = XY$ (таких две орбиты в A_l, одна в остальных случаях);
- $\theta = \pi/2$, $\langle X, Y \rangle = XY$, корни α, β порождают D_2 (такая орбита всегда одна);
- $\theta = \pi/2$, $\langle X, Y \rangle = XY$, корни α, β порождают $2\,\mathrm{A}_1$ (таких орбиты две в D_4 и одна в остальных случаях)
- $\theta = 2\pi/3$, $\langle X, Y \rangle = XYZ$, где $Z = [X, Y]$ (такая орбита ровно одна);

- $\theta = \pi$, $\langle X, Y\rangle = \mathrm{SL}_2(K)$ (такая орбита ровно одна).

Эту теорему доказал Вавилов в 1988 году с использованием разложения Брюа. Вавилов в 1989 году получил следующую теорему.

Теорема 1.4. Пусть x — короткий корневой элемент в группе Шевалле типа $\mathrm{B}_l, \mathrm{C}_l$ или F_4. Тогда существует $u \in U(\Phi, K)$ такой, что либо $x = u^{-1}x_\gamma(t)u$ (где γ — короткий корень), либо $x = u^{-1}x_\alpha(at)x_\beta(bt)u$ (где α и β — ортогональные длинные корни, $(\alpha - \beta)/2 \in \Phi$, $a, b \in K^*$, $a/b \in -(K^*)^2$. Если характеристика K равна двум, то реализуется только первый случай.

Обозначим $X_{\alpha,\beta} = \{x_\alpha(at)x_\beta(bt)\}$.

Теорема 1.5. Пусть X — длинная корневая подгруппа, Y — короткая корневая подгруппа, $\Phi = \mathrm{B}_l, \mathrm{C}_l, \mathrm{F}_4$, характеристика поля не равна двум. Тогда существует $g \in G(\Phi, K)$ такой, что $X^g = X_\delta$, $Y^g = X_\gamma$ или $X_{\alpha,\beta}$. Обозначим через θ угол между δ и γ или максимальный из углов $\angle(\delta, \alpha)$, $\angle(\delta, \beta)$. Тогда имеет место ровно одна из следующих ситуаций:

- $\theta = \pi/3$, $\langle X, Y\rangle = XY$;
- $\theta = \pi/3$, $\langle X, Y\rangle = XY$;
- $\theta = \pi/2$, $\langle X, Y\rangle = XY$;
- $\theta = 2\pi/3$, $\langle X, Y\rangle = XYZ$, где $Z = [X, Y]$;
- $\theta = 2\pi/4$, $\langle X, Y\rangle = U(\mathrm{C}_2, K)$ — унипотентный радикал борелевской подгруппы в $G(\mathrm{C}_2, K)$;
- $\theta = \pi$, $\langle X, Y\rangle = \mathrm{SL}_2(K) \times Z$, где Z — длинная корневая подгруппа.

Таким образом, орбита однозначно определяется углом. В характеристике 2 реализуются только случаи $\theta = \pi/4, 3\pi/4, \pi$.

Перейдем к парам коротких корневых подгрупп. Пусть X, Y — пара коротких корневых подгрупп. Тогда (X, Y) можно сопрячь элементом $g \in G$ так, что получится пара (X_ρ, Y^g). При этом $Y^g = X_\gamma^u$ или $X_{\alpha,\beta}^u$. Поэтому исходная пара сопряжена паре (X_ρ^u, X_γ) или паре $(X_\rho^u, X_{\alpha,\beta})$, где $X_\rho^u = \{x_\rho(t)\prod x_{\rho_i}(c_i t) \mid c_i \in K, t \in K\}$. В случае C_l есть только $\rho_1 = \delta$, и получаем $x_\rho(t)x_\delta(ct)$. В случаях B_l и F_4 получаем $x_\rho(t)x_{\rho_2}(c_2 t)\dots x_{\rho_l}(c_l t)$. При этом $\rho_i = e_1 + e_i$, $\rho_2 = e_1 + e_2 = \delta$.

Лемма 1.6. Пара (X, Y) сопряжена одной из следующих пар:

- (X_ρ, X_γ);
- $(X_\rho, X_{\alpha,\beta})$;
- $(X_\rho, \delta, X_\gamma)$;
- $(X_{\rho,\delta}, X_{\alpha,\beta})$;
- $(X_{\rho,\delta,\lambda}, X_{\alpha,\beta})$

В случае характеристики 2 возможен только первый случай. Здесь $X_{\rho,\delta} = \{x_\rho(t)x_\delta(ct) \mid t \in K\}$, $X_{\rho,\delta,\lambda} = \{x_\rho(t)x_\delta(t)x_\lambda(t) \mid t \in K\}$.

Обозначим $\theta_1 = \angle(\rho, \gamma), \theta_2 = \angle(\delta, \gamma), \eta_1 = \max(\angle(\rho, \alpha), \angle(\lambda, \alpha)), \eta_2 = \max(\angle(\rho, \beta), \angle(\lambda, \beta))$. Оказывается, эти четыре угла описывают порождение (но не описывают орбиты). Пара X, Y часто порождает XY, но возможны еще

- XYZ, где $Z=[X,Y]$ — длинная корневая подгруппа;
- XYZ, где $Z=[X,Y]$ — короткая корневая подгруппа;
- $U(\mathrm{C}_2,K)$;
- $U(\mathrm{C}_2,K)\times Z$, где Z — длинная корневая подгруппа:
- $\mathrm{SL}_2(K)$;
- $\mathrm{SL}_2(K)\times Z$;
- $\mathrm{SL}_2(K)\times Z_1\times Z_2$;
- $\mathrm{SL}_2(K)\ltimes(Z_1\times Z_2)$;
- $\mathrm{SL}_2(K)\times\mathrm{SL}_2(K)$;
- $\mathrm{SL}_2(L)\times\mathrm{SL}_2(L)$, где $[L:K]=2$;
- $\mathrm{SL}_2(K)X_{\delta-\rho}X_\delta X_{2\rho-\delta}$.