A local-global principle for symplectic K_2

Андрей Лавренов

24.03.2016

1 Формулировка основного результата

Теорема 1.1 (Локально-глобальный принцип)**.** Пусть R — коммутативное кольцо, $n \geq 3$, и пусть $g \in \mathrm{St}^{\mathrm{Sp}_{2n}}(R[t], tR[t])$. Элемент g равен 1 тогда и только тогда, когда $g_{\mathfrak{m}} = 1 \in \mathrm{St}^{\mathrm{Sp}_{2n}}(R_{\mathfrak{m}}[t])$ для всех максимальных идеалов $\mathfrak{m}$ кольца R.

Зачем нужна эта теорема? Есть некоторая надежда доказать, что $K_2^{\mathrm{Sp}_{2n}}(R[t]) = K_2^{\mathrm{Sp}_{2n}}(R)$ (для регулярного кольца R, содержащего поле). Теорема 1.1 говорит, что достаточно доказать это для локального R.

Напомним, что Sp_{2n} действует на R^{2n}, сохраняя симплектическую форму $\langle -,-\rangle$. Элементарная симплектическая группа $\mathrm{Ep}_{2n}(R)$ порождена преобразованиями $T(u,v,a)$, которые выглядят так: $w \mapsto w + u(\langle v,w\rangle + a\langle u,w\rangle) + v\langle u,w\rangle$, где $\langle u,v\rangle = 0$, $a \in R$. Такие преобразования называются ESD-трансвекциями.

С другой стороны, группа Стейнберга порождена элементами вида $X(u,v,a) \in \mathrm{St}^{\mathrm{Sp}_{2n}}(R)$, причем

- X0 $\varphi(X(u,v,a)) = T(u,v,a)$;
- X1 $gX(u,v,a)g^{-1} = X(\varphi(g)u, \varphi(g)v, a)$ для всех $g \in \mathrm{St}_{\mathrm{Sp}_{2n}}(R)$;
- X2 $X(ub,0,a) = X(u,0,ab^2)$;
- X3 $X(u,v,0) = X(v,u,0)$;
- X4 $X(ub,ua,0) = X(u,0,2ab)$;
- X5 $X(u,v,a) = X(u,v,0)X(u,0,a)$;

если $w \in R^{2n}$, $\langle u,w\rangle = 0$ и либо $u_i = u_{-i} = 0$, либо $v_i = v_{-i} = w_i = w_{-i} = 0$, то есть еще соотношения

- X6 $x(u,v,a)X(u,w,b) = X(u, v+w, a+b+\langle v,w\rangle)$;
- X7 $X(u,va,0) = X(v,ua,0)$;
- X8 $X(u+vb,0,a) = X(u,0,a)X(v,0,b^2a)X(u,vab,0)$.

2 Относительная группа Стейнберга

Если идеал $I \trianglelefteq R$ расщепляется, то есть, есть гомоморфизм $R/I \to R$, расщепляющий короткую точную последовательность $I \hookrightarrow R \twoheadrightarrow R/I$, то положим

$$\mathrm{St}^{\mathrm{Sp}_{2n}}(R,I) = \mathrm{Ker}(\mathrm{St}^{\mathrm{Sp}_{2n}}(R) \to \mathrm{St}^{\mathrm{Sp}_{2n}}(R/I))$$

Оказывается, что эта группа порождена образующими $(u,v,a,b) \in \mathrm{Ep}_{2n}(R)e_1 \times R^{2n} \times I \times I$ с соотношениями

T0 $(u, vr, a, b) = (u, v, ra, b)$;

T1 $(u, v, a, b)(u, w, a, c) = (u, v + w, a, b + c + a^2\langle v, u\rangle)$;

T2 $(u, v, a, 0)(u, v, b, 0) = (u, v, a + b, 0)$;

T3 $(u, u, a, 0) = (u, 0, 0, 2a)$;

T4 $(u, v, a, 0) = (v, u, a, 0)$ для $(u, v) \in \mathrm{Ep}_{2n}(R)(e_1, e_2)$;

T5 $(u + vr, 0, 0, a) = (u, 0, 0, a)(v, 0, 0, ar^2)(u, v, ar, 0)$ для $(u, v) \in \mathrm{Ep}_{2n}(R)(e_1, e_2)$;

T6 $(u', v', a', b')(u, v, a, b)(u', v', a', b')^{-1} = (T(u', v'a', b')u, T(u', v'a', b')v, a, b)$.

Отображение $\kappa\colon \mathrm{St}^{\mathrm{Sp}_{2n}}(R, I) \to \mathrm{St}^{\mathrm{Sp}_{2n}}(R)$ переводит (u, v, a, b) в $X(u, va, b)$; если I — расщепляющийся идеал, то это обычное вложение.

3 Локально-глобальный принцип

Пусть элемент $a \in R$ не нильпотентен; $\lambda_a\colon R \to R_a$ — главная локализация, и для каждого $x \in R[t]$ обозначим через $\mathrm{ev}_x\colon R[t] \to R[t]$ гомоморфизм эвалюации, отправляющий t в x.

Если $g \in \mathrm{St}^{\mathrm{Sp}_{2n}}(R)$, то будем обозначать $g(x) = \mathrm{ev}_{x,*}(g)$.

Лемма 3.1 (Dilation principle)**.** Пусть $g(t) \in \mathrm{St}^{\mathrm{Sp}_{2n}}(R[t], tR[t])$ такой, что $\lambda_{a,*}(g) = 1 \in \mathrm{St}^{\mathrm{Sp}_{2n}}(R_a[t])$. Тогда существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что $g(a^N t) = 1$.

Определение 3.2. Обозначим $B = R \ltimes tR_a[t]$, где умножение выглядит так: $(r, f)(s, g) = (rs, \lambda_a(r)g + f\lambda_a(s) + fg)$

Лемма 3.3.

1. Обозначим $S_i = R[t]$. Рассмотрим индуктивную систему
$$S_0 \xrightarrow{\mathrm{ev}_{at}} S_1 \xrightarrow{\mathrm{ev}_{at}} \dots$$
Ее предел изоморфен B при помощи отображений $\varphi_i\colon S_i \to B$, $p(t) \mapsto (p + tR[t], \lambda_{0,*}(p)(a^{-i}t) - \lambda_{a,*}(p)(0))$

2. $\varinjlim \mathrm{St}^{\mathrm{Sp}_{2n}}(S_i) \cong \mathrm{St}^{\mathrm{Sp}_{2n}}(B)$.

Пусть B — произвольное коммутативное кольцо, $a \in B$ не нильпотентен, $I \trianglelefteq B$, и пусть для любого $x \in I$ существует единственный $y \in I$ такой, что $ya = x$. Это равносильно тому, что $\lambda_a|_I\colon I \to I_a = \lambda_a(I)$ биективно.

Поэтому существует отображение $T\colon \mathrm{St}^{\mathrm{Sp}_{2n}}(B_a, I_a)^T \to \mathrm{St}^{\mathrm{Sp}_{2n}}(B, I)$, где слева стоит группа, заданная образующими и соотношениями.

Докажем лемму 3.1 (после этого более-менее известно, как выводится локально-глобальный принцип). Обозначим $I = tR_a[t] \trianglelefteq B$ и рассмотрим следующую диаграмму (в которой пока не построен один морфизм):

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{St}(R[t], tR[t]) \arrow[rr] \arrow[dr, "\varphi_{0,*}"] \arrow[dd, "\lambda"] & & \mathrm{St}(R[t]) \arrow[dd, "\lambda"] \\
& \mathrm{St}(B, I) \arrow[dl, "\lambda"] \arrow[dr] & \\
\mathrm{St}(R_a[t], tR_a[t]) \arrow[rr] & & \mathrm{St}(B)
\end{tikzcd}$$

Элемент $g(t) \in \mathrm{St}(R[t], tR[t])$ переходит в 1 в $\mathrm{St}(B)$, поэтому он переходит в 1 в каком-то S_N, и потому $g(a^N t) = 1$.

Для построения стрелки $\mathrm{St}(B, I) \to \mathrm{St}(B)$ нужно отправить элемент $(u, v, b, c) \in \mathrm{Ep}_{2n}(B_a)e_1 \times B_a^{2n} \times I \times I$ куда-нибудь. Хочется отправить его в что-то типа $X(ua^N, va^N, b/a^M, c/a^L)$. Для этого нужно построить новые образующие $Z(\dots)$, у которых на первом месте стоят векторы u какого-то более общего вида, чем те, у которых стоят нули в каких-то местах, или что-то вроде.