Структурируемые алгебры и алгебраические группы: апдейт

Анастасия Ставрова

04.04.2016

Доклад основан на работе Lien Boelaert, Tom De Medts, Anastasia Stavrova, «Moufang sets and structurable division algebras».

1 Основные определения

Пусть K — поле, характеристика которого отлична от 2 и 3. Все рассматриваемые алгебры будут конечномерны.

Определение 1.1. **Структурируемая алгебра** — это алгебра A над K с инволюцией и единицей ($\overline{ab} = \overline{b} \cdot \overline{a}$, $\overline{\overline{a}} = a$, $\overline{1} = 1$) такая, что

$$[V_{x,y}, V_{z,w}] = V_{V_{x,y}(z),w} - V_{z,V_{y,z}(w)}$$

для любых $x, y, z, w \in A$, где $V_{x,y}(z) = (x\overline{y})z + (z\overline{y})x - (z\overline{x})y$.

Примеры 1.2.

1. Ассоциативные алгебры с инволюцией.
2. Йордановы алгебры.

Через S мы будем обозначать множество косоэрмитовых элементов:

$$S = \{s \in A \mid \overline{s} = -s\}.$$

Замечание 1.3. Структура умножения и инволюции на A восстанавливается из $V_{x,y}(z)$ и 1: обозначим

$$\langle a, b, c\rangle = \frac{1}{2}(V_{ab}(c) + V_{ba}(c) + V_{ac}(b) - V_{bc}(a)$$

Тогда $\overline{a} = \langle 1, a, 1\rangle$, $ab = \langle a, 1, b\rangle$.

Определение 1.4. Элемент $a \in A$ называется **обратимым**, если существует элемент $\widehat{a} \in A$ такой, что $V_{a,\widehat{a}} = \mathrm{id}_A$. В случае ассоциативной алгебры A нетрудно понять, что $\widehat{a} = \overline{a}^{-1}$

Замечание 1.5. Если $a \in A$ обратим, то отображение $V_{a,-}(a)\colon A \to A$ обратимо.

Определение 1.6. Пусть L — алгебра Ли над K. Она называется **5-градуированной**, если L — $\mathbb{Z}$-градуированная, то есть, $L = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} L_i$, и $L_i = 0$ при $|i| > 2$. Таким образом,

$$L = L_{-2} \oplus L_{-1} \oplus L_0 \oplus L_1 \oplus L_2.$$

По структурируемой алгебре A можно построить 5-градуированную алгебру Ли

$$K(A) = S_- \oplus A_- \oplus dnstrl(A) \oplus A_+ \oplus S_+,$$

где

$$dnstrl(A) = k\langle V_{x,y} \mid x, y \in A\rangle \subseteq \mathrm{End}_k(A)$$

(на самом деле, это даже подалгебра Ли в $\mathrm{End}_k(A)$). Мы не будем определять скобку Ли (см. доклад от 2 марта 2015 года), заметим лишь, что на $dnstrl(A)$ это обычное $ab - ba$, и если $x, y, z \in A$, то

$$[[x_+, y_-], z_+] = (V_{x,y}(z)).$$

Кроме того, $[x_+, x'_+] = (x\overline{x'} - \overline{x}x')_+ \in S_+$.

Предложение 1.7 (Allison, 1979)**.** 1. Алгебра A простая тогда и только тогда, когда $K(A)$ простая. (простота для структурируемых алгебр означает, что у нее нет двусторонних идеалов, инвариантных относительно инволюции).

2. Алгебра A центральна тогда и только тогда, когда $K(A)$ центральна.

Определение 1.8. Алгебра Ли L над K называется **центральной**, если ее **центроид** $ctd_K(L)$ совпадает с K, где

$$ctd_K(L) = \{\varphi \in \mathrm{End}_K(L) \mid \varphi([a, b]) = [\varphi(a), b] \text{ для всех } a, b \in L\}$$

Определение 1.9. Структурируемая алгебра A называется **центральной**, если $Z(A) = K$ где

$$Z(A) = \{x \in A \mid \overline{x} = x,\ xy = yx,\ (xy)z = x(yz),\ (yx)z = y(xz) \text{ для всех } y, z \in A\}$$

2 Алгебраичность

Определение 2.1. Пусть L — 5-градуированная алгебра Ли над K. Говорят, что L обладает свойством **алгебраичности**, если для любого элемента $x \in L_i$, $i \in \{\pm 1, \pm 2\}$ отображение

$$\exp(x) = \sum_{i=0}^{4} \frac{1}{i!}(\mathrm{ad}_x)^i$$

является автоморфизмом L.

Упражнение 2.2. В характеристике, отличной от 5, любая алгебра Ли алгебраична.

Замечание 2.3. Йордановы алгебры алгебраичны.

Определение 2.4. Структурируемая алгебра A называется **алгебраичной**, если $K(A)$ алгебраична.

Теорема 2.5 (BDMS, THeorem 4.1.8)**.** Пусть L — центральная простая алгебраическая алгебра Ли над K, то $G = \mathrm{Aut}_K(L)^\circ$ — присоединенная простая алгебраическая группа над K изотропного K-ранга ≥ 1. При этом $\mathrm{Lie}(G) = \mathrm{Der}_K(L)$, $L = [\mathrm{Lie}(G), \mathrm{Lie}(G)]$, $\dim \mathrm{Lie}(G) - \dim L \leq 1$. Эта разность равна 1 тогда и только тогда, когда G типа A_n и $\mathrm{char}(K) \mid n + 1$.

Построим расщепимый тор $S \leq G$; $S \cong \mathbb{G}_m$. Для любой K-алгебры R и для любого $t \in \mathbb{G}_m(R) = R^*$ зададим действие

$$t \cdot x = t^i x$$

для всех $x \in K(A)_i$, $i \in \mathbb{Z}$.

Следствие 2.6. Если A — центральная простая алгебраическая структурируемая алгебра над K, то $G = \mathrm{Aut}(K(A))^\circ$ — присоединенная простая алгебраическая группа над K.

Вопрос: какие из структурируемых алгебр в характеристике 5 являются алгебраическими?

Теорема 2.7 (BDMS, Theorem 4.2.8)**.** Если A — центральная простая структурируемая алгебра с делением, то A алгебраична.

Посмотрим на алгебру $K(A) \otimes_K \overline{K}$. Это простая алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем $\overline{K}$. Такие алгебры классифицированы (см. A. Premet, H. Strade, 1997–2008), и как раз в характеристике, отличной от 2 и 3.

Теорема 2.8 (Кострикин; Premet–Strade)**.** Если L — простая алгебра Ли над $\overline{K}$, то L является алгеброй Ли–Шевалле тогда и только тогда, когда не существует ненулевого элемента $x \in L$ такого, что $(\mathrm{ad}_x)^2 = 0$.

Продолжаем: достаточно доказать, что не существует $x \in K(A) \otimes_K \overline{K}$ такого, что $(\mathrm{ad}_x)^2 = 0$, так как все алгебры Ли–Шевалле алгебраичны. Спуском доказываем, что такой x обязан существовать уже в $K(A)$. Более того, можно считать, что $x \in K(A)_i$, где $i = \pm 1$. Теперь воспользуемся тем, что A — алгебра с делением: оператор $U_x = V_{x,-}(x)$ обратим. Но $U_x = [x, [-, x]] = -(\mathrm{ad}_x)^2(-)$.

Задача 2.9. Доказать, что любая [центральная] простая структурируемая алгебра является алгебраическая. Видимо, для этого нужно доказать, что любая простая алгебра раскладывается в прямую сумму алгебр с делением. Это известно в характеристике, отличной от 5 (см. О. Смирнов, 1990), и для йордановых алгебр.

Гипотеза 2.10. Все структурируемые алгебры алгебраичны.

Задача 2.11. Определить (правильным образом) структурируемые алгебры над полями характеристик 2 и 3.

3 Биективное соответствие

Теорема 3.1 (BDMS)**.** Имеется каноническая биекция между множеством классов изотопии центральных простых структурируемых алгебр с делением над K и множеством классов изоморфизма присоединенных простых алгебраических групп над K изотропного K-ранга 1. При этом алгебре A соответствует группа $G = \mathrm{Aut}(K(A))^\circ$.

Определение 3.2. Пусть A, A' — структурируемая алгебра над K. Отображение $\varphi\colon A \to A'$ называется **изотопией** если оно является изоморфизмом векторных пространств над K таким, что $\varphi(V_{x,y}(z)) = V_{\varphi(x),\varphi(y)}(\varphi(z))$ для всех $x, y, z \in A$.

Почему K-ранг 1 соответствует алгебрам с делением? Пусть G — простая алгебраическая группа над K. Что значит, что она имеет ранг 1? Существует максимальный расщепимый тор $H = \mathbb{G}_m \subseteq G$. Такой тор задает $\mathbb{Z}$-градуировку на $\mathrm{Lie}(G)$:

$$\mathrm{Lie}(G)_i = \{v \in \mathrm{Lie}(G) \mid t \cdot v = t^i v \text{ для всех } t \in \mathbb{H}(\overline{K})\}.$$

Тогда множество

$$\Phi(H, G) = \{i \in \mathbb{Z} \setminus 0 \mid \mathrm{Lie}(G)_i \neq 0\}$$

является абстрактной системой корней ранга 1; она изоморфна либо A_1, либо BC_1 — получаем градуировку длины либо 3, либо 5.

Если есть тор, то есть и разложение Брюа. Действительно, можно рассмотреть параболические подгруппы $P_{\min}$, $P_{\min}^-$, и их алгебры Ли:

$$\mathrm{Lie}(P_{\min}) = \mathrm{Lie}(G)_0 \oplus \mathrm{Lie}(G)_1 \oplus \mathrm{Lie}(G)_2,$$
$$\mathrm{Lie}(P_{\min}^-) = \mathrm{Lie}(G)_0 \oplus \mathrm{Lie}(G){-1} \oplus \mathrm{Lie}(G)_{-2}.$$

Разложение Брюа выглядит так:

$$G(K) = P_{\min}(K) \coprod P_{\min}(K) w_\alpha P_{\min}(K).$$

Здесь w_α — единственный нетривиальный элемент группы Вейля $W = \{\mathrm{id}, w_\alpha\} = \mathrm{Norm}_G(L)(K)/\operatorname{Cent}_G(L)(K)$.

Лемма 3.3 (Allison, Faulkner, Corollary 14)**.** Пусть A — алгебраическая структурируемая алгебра над K. Элемент $x \in A$ обратим тогда и только тогда, когда существуют $(y,t),(z,s) \in A \times S$ такие, что элемент $w = \exp(y_- + t_-)\exp(x_+)\exp(z_- + s_-)$ удовлетворяет $w(K(A)_i) = K(A)_{-i}$ для всех $i \in \mathbb{Z}$.

По лемме 3.3 если G имеет ранг 1, то A — алгебра с делением: если $x \in A$, то $\exp(x_+) \in U_{P_{\min}}(K)$, и по разложению Брюа $\exp(x_+) = \exp(*)w_\alpha \exp(*)$, где $* \in U_{P^-_{\min}}(K)$.

Лемма 3.4. Если G — простая алгебраическая группа и на $\mathrm{Lie}(G)$ есть 5-граудировка $\mathrm{Lie}(G) = \bigoplus_{i=-2}^{2} \mathrm{Lie}(G)_i$, то для построения структурируемой алгебры A такой, что $G \cong \mathrm{Aut}(K(A))^\circ$, $K(A) = [\mathrm{Lie}(G), \mathrm{Lie}(G)]$, достаточно найти элемент $x_0 \in \mathrm{Lie}(G)_1$ такой, что существуют $(y,t),(z,s) \in \mathrm{Lie}(G)_{-1} \oplus \mathrm{Lie}(G)_{-2}$, удовлетворяющие условию, что $w = \exp(y+t)\exp(x)\exp(z+s)$ обращает градуировку: $w(\mathrm{Lie}(G)_i) = \mathrm{Lie}(G)_{-i}$ для всех $i \in \mathbb{Z}$.

Напоминание: $V_{x,y}(z) = [x,[y,z]]$; после этого элемент x_0 из леммы 3.4 окажется единицей.

Задача 3.5. Пусть G — присоединенная группа Шевалле над алгебраически замкнутым полем $K = \overline{K}$, P и P^- — две противоположные параболические такие, что P и P^- сопряжены. Предположим, что U_P имеет высоту два.

$$U_P = \prod_{\alpha \in \Sigma_1 \sqcup \Sigma_2} x_\alpha(K)$$

Доказать, что есть элементы $x \in \exp(\bigoplus_{\alpha\in\Sigma_1} Ke_\alpha)$ и $y, z \in U_{P^-}(K)$ такие, что $P^{yxz} = P^-$ и $(P^-)^{yxz} = P$.

Напомним, что $x_\alpha(c) = \exp(ce_\alpha) = \sum_{i=0}^{4} \frac{1}{i!}\,\mathrm{ad}^i(ce_\alpha) \in \mathrm{Aut}(\mathrm{Lie}(G))$. По формуле Бэйкера–Кэмпбелла–Хаусдорфа $\exp(e_\alpha + e_{\alpha'}) = \exp(e_\alpha)\exp(e_{\alpha'})\exp(\frac{1}{2}[e_\alpha, e_{\alpha'}])$.

Если это сделать, то мы получим соответствие между центральными простыми структурируемыми алгебрами и парами $(G, \mathbb{G}_m)$, где $\mathbb{G}_m \subseteq G$, а G — простая алгебраическая группа.