Касательные конусы к многообразиям Шуберта

Александр Шевченко

17.05.2016

1 Основные обозначения

Пусть G — редуктивная алгебраическая группа над $\mathbb{C}$, T — максимальный тор, $B \supseteq T$ — борелевская подгруппа, N — унипотентный радикал B, Φ — система корней относительно T, выбрана система простых корней $\Delta \subseteq \Phi^+$, $W = N(T)/T$, $G = \coprod_{w \in W} BwB$, $\mathcal{F} = G/B$, $\mathcal{F} = \coprod X_w^0$, $\overline{X_w^0} = X_w$.

Пусть $p = eB \in X_w$, $w \in W$, $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{p,X_w}$ — локальное кольцо. Обозначим через $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_{p,X_w}$ его максимальный идеал и рассмотрим фильтрацию $\mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{m}^2 \supseteq \ldots$. Пусть $R = \operatorname{gr} \mathcal{O} = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}$, $TC_pX_w = \operatorname{Spec} R$ — **неприведенный касательный конус**; будем обозначать его через C_w. Заметим, что R порождается элементами из $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, и потому $R = S(T_pX_w)/I$ для некоторого идеала I. Пусть I_0 — идеал, порожденный слагаемыми минимальной степени элементов $f \in I$. Множество нулей идеала I_0 в T_pX_w обозначается через C_w^{red} и называется **приведенным касательным конусом**.

Тогда $C_w \subseteq T_pX_w \subseteq T_p\mathcal{F}$ — подсхема, а $C_w^{\mathrm{red}} \subseteq T_pX_w \subseteq T_p\mathcal{F}$ — подмногообразие.

Вопрос: в каких случаях $C_{w_1} = C_{w_2}$? Верно ли, например, что из $C_{w_1} = C_{w_2}$ следует $X_{w_1} = X_{w_2}$ (или, равносильно, $w_1 = w_2$)? Ответ: нет, например, $C_w = C_{w^{-1}}$. Если w — инволюция, то, конечно, $w = w^{-1}$. Пусть теперь $w_1, w_2 \in I(W)$ (где $I(W)$ — множество инволюций в W). Бывает ли, что $C_{w_1} = C_{w_2}$?

2 История

Этим вопросом занимались, Д. Елисеев, А. Панов (2011): посчитаны касательные конусы C_w, C_w^{red} для случая A_n, $n \leq 4$. Была выдвинута **гипотеза Панова**: если $w_1, w_2 \in I(W)$, $w_1 \neq w_2$, то $C_{w_1} \neq C_{w_2}$ и $C_{w_1}^{\mathrm{red}} \neq C_{w_2}^{\mathrm{red}}$. Далее, Д. Елисеев, М. Игнатьев (2013) свели гипотезу к неприводимым системам и доказали для A_n, F_4, G_2 (для неприведенных конусов). М. Бочкарев, М. Игнатьев, А. Шевченко (2014): доказали гипотезу для неприведенных конусов в случаях B_n, C_n, и для приведенных в случаях A_n, C_n. Наконец, М. Игнатьев, А. Шевченко (2015) доказали гипотезу для D_n (для приведенных конусов — только в случае базисных инволюций).

3 Многочлены Костанта–Кумара

См. работу Ш. Кумара (1996) про особенности многообразий Шуберта, Theorem 2.2. Мы знаем, что T действует на X_w (сопряжениями или умножениями), и точка p инвариантна относительно этого действия. Поэтому возникает действие T на локальном кольце $\mathcal{O}$, и R является T-модулем. Поэтому $R = \bigoplus_{\lambda \in X(T)} R_\lambda$, где $X(T)$ — решетка характеров T, $R_\lambda = \{f \in R \mid t \cdot f = \lambda(t)f\}$. Известно, что $\dim R_\lambda < \infty$. Рассмотрим $\operatorname{ch}(R) = \sum_{\lambda \in X(T)} \mathfrak{m}_\lambda e^\lambda$, где $m_\lambda = \dim R_\lambda$. Этот $\operatorname{ch}(R)$ является элементом множества Λ всех линейных комбинаций e^λ (возможно, бесконечных). Если $a = \sum_{i=1}^{n} n_{\lambda_i} e^{\lambda_i}$, можно определить

$$[a]_k = \sum_{i=1}^{n} n_{\lambda_i} \frac{\lambda_i^k}{k!} \in \mathbb{C}[\mathfrak{h}],$$

где $\mathfrak{h} = \mathrm{Lie}(T)$. Положим $[a] = [a]_{k_0}$, где $k_0 = \min\{k \mid [a]_k \neq 0\}$. Например, если $a = e^0 - e^\lambda$, то $[a]_0 = 0$, и $[a] = [a]_1 = -\lambda$.

Будем обозначать через A групповое кольцо решетки характеров $X(T)$, и $Q = \mathrm{Frac}(A)$. На A можно смотреть как на конечные линейные комбинации из Λ.

На самом деле $\mathrm{ch}(R) \in Q$: запишем его как $q = a/b$ и рассмотрим $[q] = [a]/[b] \in \mathbb{C}(\mathfrak{h})$. Рассмотрим отображение $(-)^* \colon Q \to Q$, $e^\lambda \mapsto e^{-\lambda}$. Тогда $(\mathrm{ch}\, R)^* \in Q$.

Пусть $c_w = [(\mathrm{ch}\, R)^*] \in \mathbb{C}(\mathfrak{h})$ Теперь можно определить **многочлен Костанта–Кумара** $d_w = (-1)^{l(w)} c_w \prod_{\alpha \in \Phi^+} \alpha \in \mathbb{C}(\mathfrak{h})$. На самом деле это многочлен: $d_w \in \mathbb{C}[\mathfrak{h}]$.

Пусть $\Delta = \{\alpha_i\}$, и s_i — отражение, соответствующее простому корню α_i. Запишем $w = s_{i_1} \dots s_{i_k}$; тогда

$$c_w = (-1)^{l(w)} \sum \frac{1}{s_{i_1}^{\varepsilon_1} \alpha_{i_1}} \frac{1}{s_{i_1}^{\varepsilon_1} s_{i_2}^{\varepsilon_2} \alpha_{i_2}} \dots \frac{1}{s_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots s_{i_k}^{\varepsilon_k} \alpha_{i_k}},$$

где суммирование ведется по всем $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ таким, что $s_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots s_{i_k}^{\varepsilon_k} = \mathrm{id}$, и все ε_i равны 0 и 1.

Пример 3.1. Пусть $\Phi = \mathsf{A}_2$. Тогда $W = S_3$; обозначим $s_1 = (12)$, $s_2 = (23)$ и возьмем $w = s_1 s_2 s_1$. Тогда в указанной сумме есть только два слагаемых: $(0,0,0)$ и $(1,0,1)$.

$$\begin{aligned}
c_w &= (-1)^3 \left(\frac{1}{s_1^0 \alpha_1} \frac{1}{s_1^0 s_2^0 \alpha_2} \frac{1}{s_1^0 s_2^0 s_1^0 \alpha_1} + \frac{1}{s_1^1 \alpha_1} \frac{1}{s_1^1 s_2^0 \alpha_1} \frac{1}{s_1^1 s_2^0 s_1^1 \alpha_1} \right) \\
&= -\left(\frac{1}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_1} + \frac{1}{(-\alpha_1)(\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_1)} \right) \\
&= -\frac{\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_2}{(\alpha_1)^2 \alpha_2 (\alpha_1 + \alpha_2)} \\
&= \frac{-1}{\alpha_1 \alpha_2 (\alpha_1 + \alpha_2)}
\end{aligned}$$

Понятно, что если $d_{w_1} \neq d_{w_2}$, то $C_{w_1} \neq C_{w_2}$.

Теорема 3.2 (Елисеев, Игнатьев, Шевченко)**.** Пусть Φ — неприводимая система корней типа A_n, B_n, C_n; тогда гипотеза Панова верна.

Набросок доказательства для A_n*.* Рассмотрим матрицу элемента w (в векторном представлении). Доказательство ведется индукцией по n. Если $w_1(1) = w_2(1) = 1$, то $d_{w_1} = \prod \alpha d_{w_1'}$ по корням из первого столбца. Если $w_1(1) = 1$ и $w_2(1) = j > 1$, рассмотрим корень $\varepsilon_1 - \varepsilon_j$, соответствующий этому месту j. Тогда, оказывается, d_{w_2} не делится на этот корень. Если же $w_1(1) = i$ и $w_2(1) = j$ при $i < j$, можно подобрать линейную форму, которая делит первый многочлен и не делит второй: это $\varepsilon_1 - \varepsilon_j$. Наконец, если $w_1(1) = j = w_2(1)$, то $d_{w_1} = f d_{w_1'} + \dots$ и $d_{w_2} = f d_{w_2'} + \dots$, и можно воспользоваться предположением индукции. □

Теперь перейдем к приведенным касательным конусам. Пусть $\leq$ — линейный порядок на Δ. Он индуцирует порядок на Φ (лексикографический). Возьмем нашу инволюцию $w \in W$ и рассмотрим $\{\alpha \in \Phi \mid w(\alpha) = -\alpha\}$. Пусть α_1 — максимальный корень в этом множестве. Далее рассмотрим $w_1 = w s_{\alpha_1}$ и продолжим эту процедуру. В итоге получим множество $\mathrm{supp}(w) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$, называемое **носителем** инволюции w. Тогда $w = s_{\alpha_1} \dots s_{\alpha_k}$.

Что такое $T_p\mathcal{F}$? Рассмотрим разложение Картана $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$. Получаем, что $T_p\mathcal{F} = T_p(G/B) = \mathfrak{g}/\mathfrak{b} = \mathfrak{n}_- \cong \mathfrak{n}^*$ (с помощью формулы Киллинга). Напомним, что

B действует на $\mathcal{F}$ (сопряжением). Точка p снова инвариантна, и потому B действует на $T_p\mathcal{F} \cong \mathfrak{n}^*$. Это на самом деле коприсоединенное действие. По w, стало быть, мы построили $\Omega_w = Bf$, где $f = \sum_{\beta \in \mathrm{supp}(w)} e_\beta^*$. Несложно понять, что $\Omega_w \subseteq C_w^{\mathrm{red}}$, и $\dim C_w^{\mathrm{red}} = l(w)$. С другой стороны, $\dim \Omega_w = l(w)$ (Игнатьев, 2012 для A_n, 2013 для C_n). Поэтому $\overline{\Omega_w} \subseteq C_w^{\mathrm{red}}$ — неприводимая компонента. Гипотеза: $\overline{\Omega_w} = C_w^{\mathrm{red}}$.

Идея: вложим G в другую редуктивную группу G' так, чтобы вложились корни Φ в корни Φ'. Предположим, что $w_1 \neq w_2$ — инволюции, но $C_{w_1} = C_{w_2}$. Тогда $l'(w_1) = l'(w_2)$. С другой стороны, несложно придумать вложение, которое не сохраняет длину. Например, для $\Phi = \mathsf{A}_n$ можно придумать вложение $S_n \hookrightarrow S_m$ при $m > n$, которое не сохраняет длину. Аналогичное соображение работает и для C_n.

4 Базисные инволюции

Пусть $\Phi = \mathsf{D}_n$, $[\pm n] = [1, \ldots, n, -n, \ldots, -1]$. Тогда W изоморфна подгруппе в группе перестановок $[\pm n]$, состоящей из w таких, что $w(-i) = -w(i)$, и количество элементов i таких, что $w(i) < 0$, четно.

Определение 4.1. Инволюция $w \in W$ называется **базисной**, если $\{i \mid w(i) = -i\}$ пусто.

Это свойство как раз гарантирует, что снова в одном столбике может стоять не более одного ненулевого элемента, и доказательство теоремы 3.2 переносится.